2013

Analiza osiągnięć gimnazjalistów

Matematyka

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu

CZĘŚĆ MATEMATYCZNO - PRZYRODNICZA
MATEMATYKA

W niniejszej publikacji przedstawiono osiągnięcia uczniów rozwiązujących zadania **w arkuszu standardowym z matematyki**, którzy ukończyli gimnazjum w roku 2013, w szkołach na terenie działania Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Poznaniu, tj. w gimnazjach w województwach: lubuskim, wielkopolskim i zachodniopomorskim.
Dane statystyczne dotyczące wyników egzaminu gimnazjalnego w 2013 r. podano w raporcie zamieszczonym na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.

Arkusz standardowy zawierał 23 zadania, w tym 20 zadań zamkniętych i 3 zadania otwarte. Wśród zadań zamkniętych dominowały zadania wyboru wielokrotnego, w których uczeń wybierał jedną z czterech podanych odpowiedzi. W sześciu zadaniach uczeń miał ocenić prawdziwość podanych stwierdzeń. Zadania otwarte (21., 22. i 23.) wymagały od gimnazjalisty samodzielnego sformułowania rozwiązania.

Za rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu standardowym z matematyki uczeń mógł uzyskać maksymalnie 29 punktów (100%); w tym za każde zadanie zamknięte po jednym punkcie (razem 20 pkt), a za trzy zadania otwarte 9 punktów (zad. 21. – 3 pkt, zad. 22. – 2 pkt, zad. 23. – 4 pkt). W zestawie wykorzystano wykres liniowy, diagramy słupkowe i kołowe, rysunki figur płaskich i brył, których poprawne zinterpretowanie pomagało wskazać prawidłową odpowiedź.

Wszystkie zadania w zestawie sprawdzały, w jakim stopniu gimnazjaliści opanowali wymagania ogólne i szczegółowe w zakresie matematyki określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III etapu edukacyjnego oraz – w myśl zasady kumulatywności przyjętej w podstawie – odnosiły się również do wymagań przypisanych wcześniejszym etapom edukacyjnym (I i II).

Każdy trzecioklasista na zaświadczeniu o szczegółowych wynikach egzaminu otrzymał swój wynik w dwóch skalach: procentowej oraz centylowej, dla każdego z sześciu zakresów egzaminu gimnazjalnego.
Wynik procentowy określa odsetek punktów, które zdający uzyskał za rozwiązanie zadań z danego zakresu.
Wynik centylowy informuje, jaki odsetek liczby gimnazjalistów uzyskał z danego zakresu wynik taki sam lub niższy niż zdający.

Ogólnie za rozwiązanie zadań w arkuszu standardowym z zakresu matematyki gimnazjaliści uzyskali średnio:

w kraju	**w Okręgu**	**w województwie**		
		lubuskim	**wielkopolskim**	**zachodniopomorskim**
48% punktów	**46,65%** punktów	**46,72%** punktów	**47,44%** punktów	**44,75%** punktów

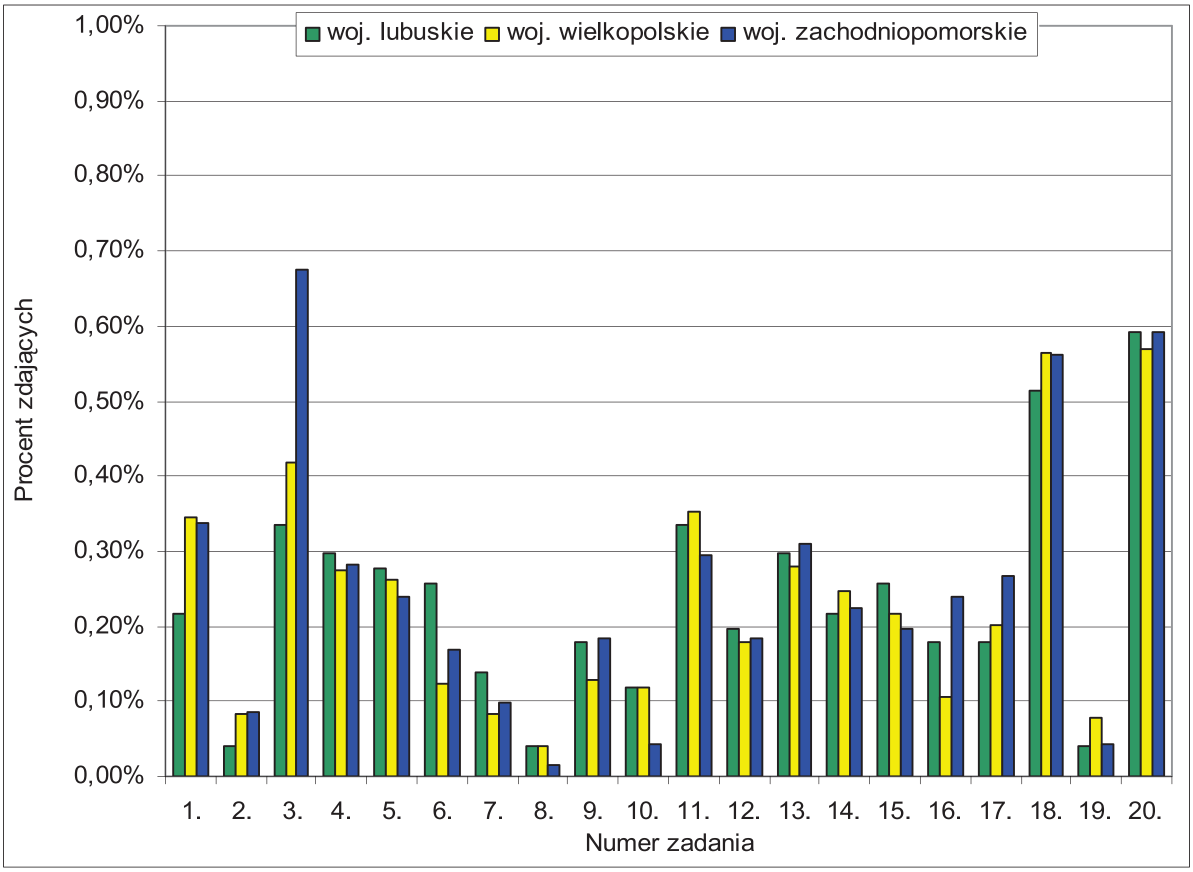
Na kolejnych stronach zaprezentowano analizę wyników uzyskanych za rozwiązanie poszczególnych zadań, która dostarcza szczegółowych informacji dotyczących mocnych i słabych stron wykształcenia matematycznego gimnazjalistów.

ANALIZA OSIĄGNIĘĆ UCZNIOWSKICH

1. Czynniki statystyczne mające wpływ na poziom osiągnięć uczniowskich

Analizę osiągnięć gimnazjalistów rozpoczniemy od przedstawienia, jaki procent uczniów nie zaznaczył odpowiedzi do zadań zamkniętych, a jaki procent zakreślił kilka odpowiedzi. W obu przypadkach skutkowało to otrzymaniem zera punktów za dane zadanie.

Jak liczne były to grupy trzecioklasistów w poszczególnych województwach, pokazano na wykresie 1.



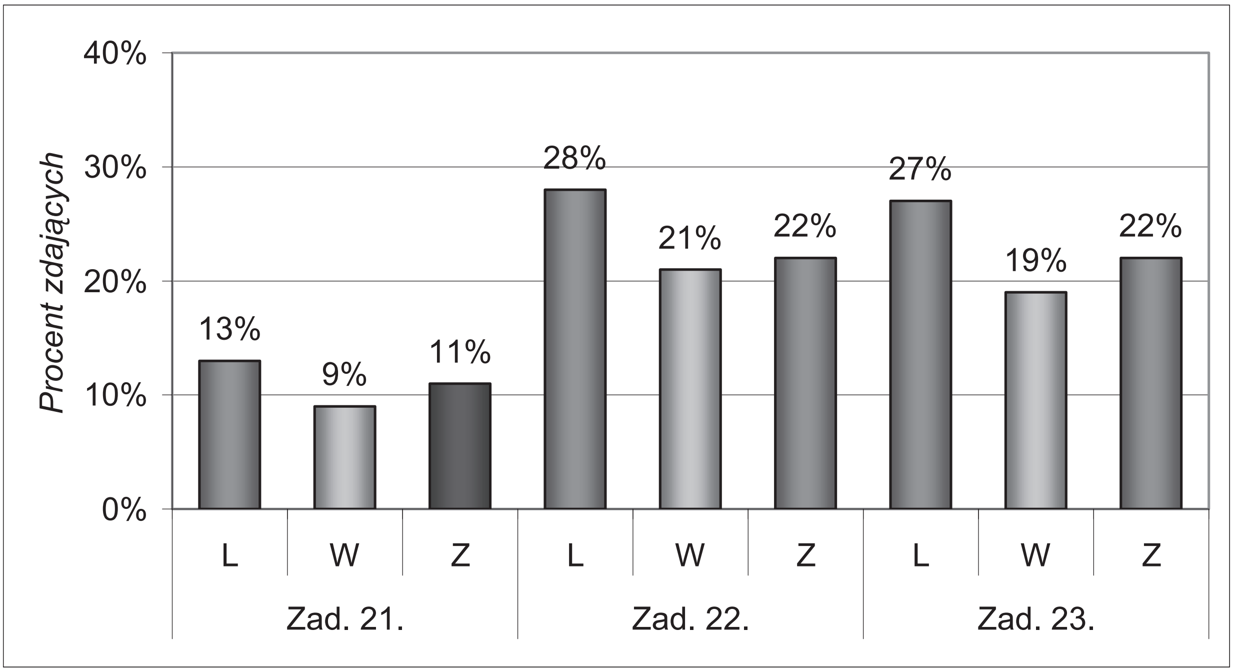
Wykres 1. *Procent zdających, którzy <u>nie zaznaczyli odpowiedzi</u> do zadań zamkniętych z matematyki*

Warto zauważyć, że w każdym województwie brak zaznaczenia odpowiedzi dotyczy wszystkich zadań w arkuszu. W tym roku w Okręgu stwierdzono brak odpowiedzi do 1432 zadań zamkniętych (w tym: L – 325, W – 1029, Z – 484).

Podczas tegorocznego egzaminu z matematyki frakcja opuszczeń w zadaniach zamkniętych była niewielka, nie przekroczyła 0,35% populacji w każdym z województw, poza zadaniami: 3., 18. i 20. Wszystkie trzy zadania były typowymi zadaniem wielokrotnego wyboru, z jedną poprawną odpowiedzią. W zadaniu trzecim należało wykazać się umiejętnością wykonania obliczeń na liczbach wymiernych w kontekście praktycznym. Aby w zadaniu 18. wskazać poprawną odpowiedź, trzeba było rozumieć pojęcie pola rombu, a w zadaniu 20. pojęcie objętości kuli.

Istotny wpływ na średni wynik uzyskany za rozwiązanie poszczególnych zadań, jak i średni wynik dla całego arkusza, ma frakcja opuszczeń zadań otwartych (wielopunktowych), którą interpretujemy jako niepodjęcie próby rozwiązania zadania, tzw. *białe plamy* w arkuszu.

Wykres 2. przedstawia, ilu uczniów w poszczególnych województwach nie podjęło próby rozwiązania zadań otwartych.



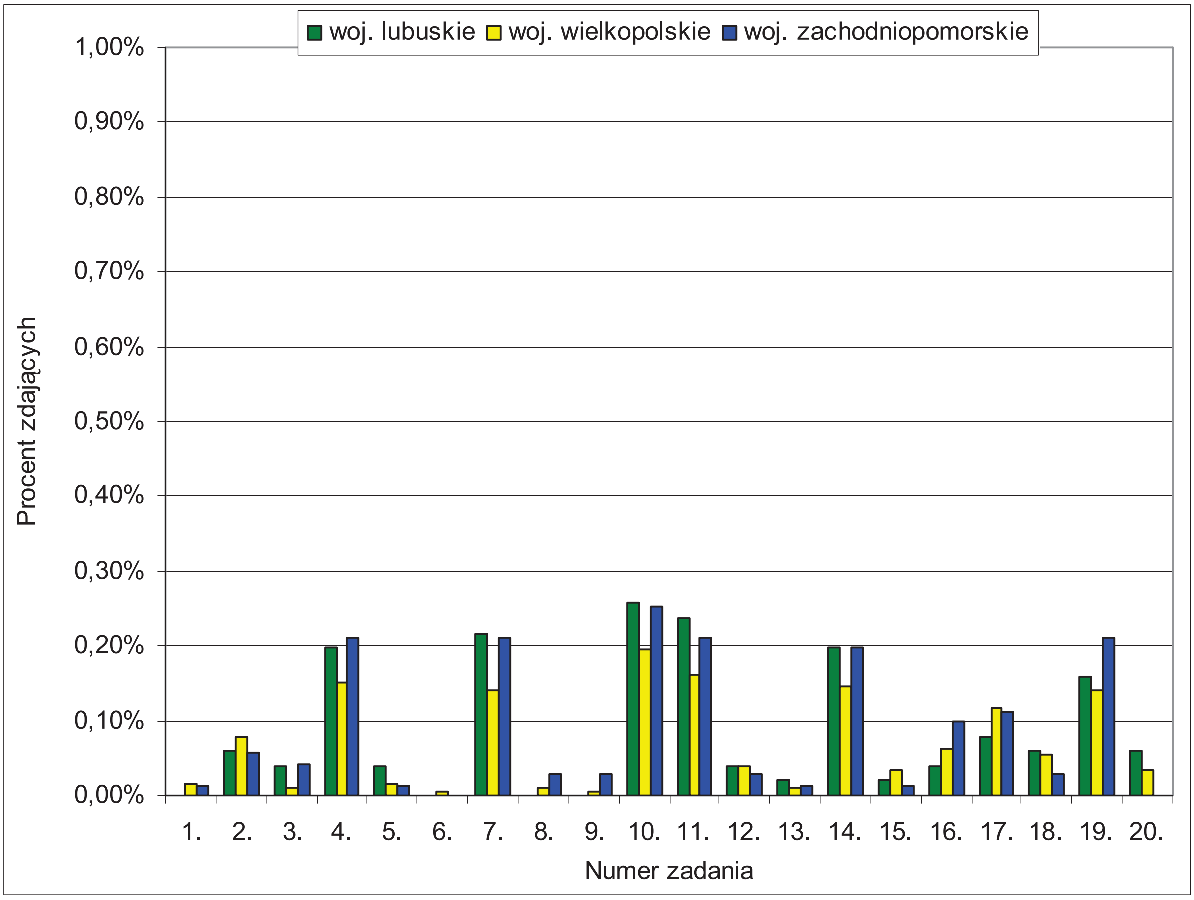
Wykres 2. *Procent zdających, którzy* <u>*nie podjęli próby rozwiązania zadań otwartych*</u> *z matematyki*

Analizując diagram należy stwierdzić, że:

- lubuscy gimnazjaliści częściej niż zdający z innych województw opuszczali rozwiązanie każdego z zadań otwartych,
- w każdym województwie największy odsetek uczniów nie podjął próby rozwiązania zadania 22, w którym wymagano uzasadnienia podanej tezy,
- w Okręgu średnio
  - co dziesiąty zdający opuścił rozwiązywanie zadania 21,
  - co dwudziesty zdający opuścił rozwiązywanie zadania 22. i 23.

Szkoły winny odpowiedzieć sobie na pytanie, dlaczego tak znaczny procent populacji nie był przygotowany do rozwiązywania zadań otwartych?

Procedury egzaminacyjne wymagają, aby w szkole zapoznać uczniów z instrukcją dotyczącą pracy z arkuszem egzaminacyjnym. Wynika z niej, że do każdego zadania zamkniętego podano tylko jedną poprawną odpowiedź. Ponadto w instrukcji opisano i przedstawiono graficznie sposób zaznaczania pomyłek. Tymczasem w Okręgu stwierdzono około pięciuset wielokrotnych zaznaczeń na kartach odpowiedzi. Rozkład wielokrotnych zaznaczeń do poszczególnych zadań w trzech województwach przedstawiono na wykresie 3.



Wykres 3. *Procent zdających, którzy <u>zaznaczyli kilka odpowiedzi</u> do jednego zadania zamkniętego z matematyki*

Wielokrotne zaznaczenia odpowiedzi, w każdym województwie, najczęściej wystąpiły w zadaniach 4., 7., 10., 11., 14. i 19. W tych sześciu zadaniach wymagano oceny podanych stwierdzeń (do każdego zadania podano dwa zdania). W arkuszu były to wszystkie zadania typu prawda-fałsz (PF). Stąd uprawnionym wydaje się wniosek, że zaznaczający wielokrotną odpowiedź nie poradzili sobie z tą formą zadania, czyli nie byli wdrożeni do pracy z zadaniami typu PF.

2. Analiza stopnia opanowania umiejętności ogólnych

Analizę jakościową wyników egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki przeprowadzono w oparciu o interpretację współczynników łatwości.

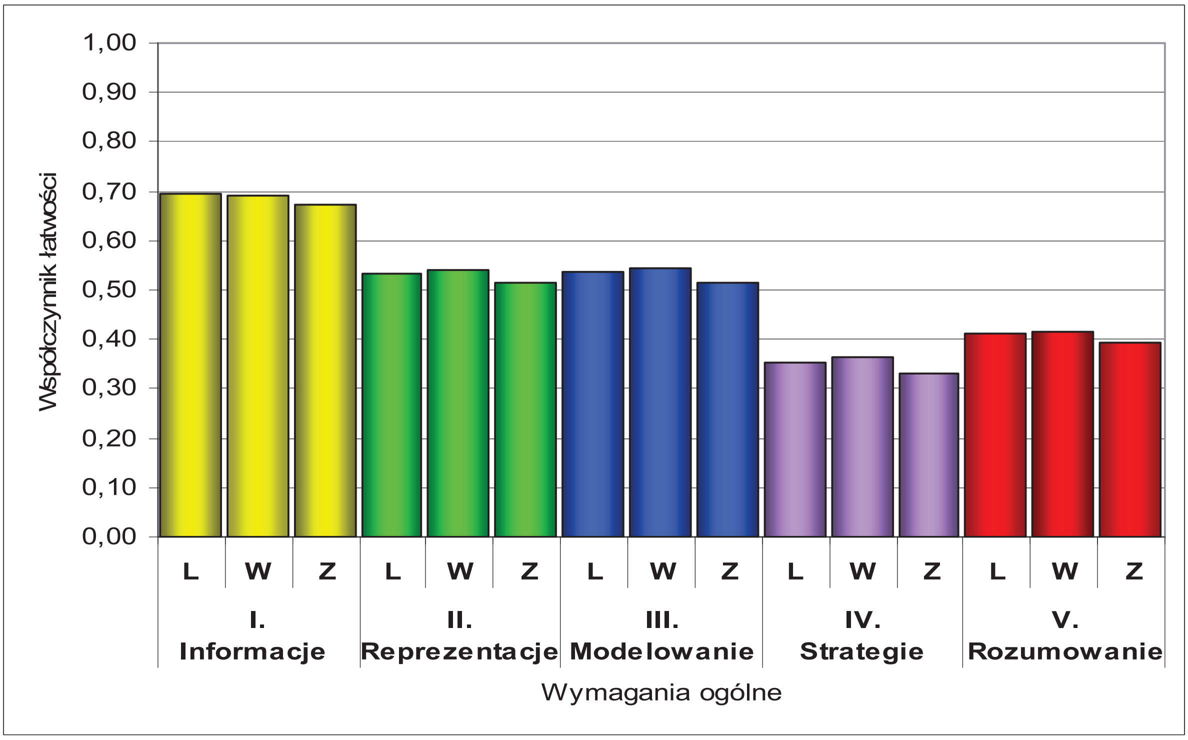
Przypominamy, że analiza ilościowa wyników egzaminu gimnazjalnego w 2013 r. znajduje się w raporcie zamieszczonym na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.

W gimnazjum nastąpiło ujednolicenie wymagań egzaminacyjnych z celami kształcenia, opisanymi w podstawie programowej z matematyki jako wymagania ogólne i szczegółowe dla III etapu edukacyjnego.

W tabeli poniżej podano wykaz wymagań ogólnych, który ułatwi ocenę stopnia opanowania przez tegorocznych trzecioklasistów wiadomości i umiejętności złożonych, kształtowanych podczas pracy nad wymaganiami szczegółowymi.

Wymaganie ogólne **I.**	–	**Wykorzystywanie i tworzenie informacji.**
Wymaganie ogólne **II.**	–	**Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.**
Wymaganie ogólne **III.**	–	**Modelowanie matematyczne.**
Wymaganie ogólne **IV.**	–	**Użycie i tworzenie strategii.**
Wymaganie ogólne **V.**	–	**Rozumowanie i argumentacja.**

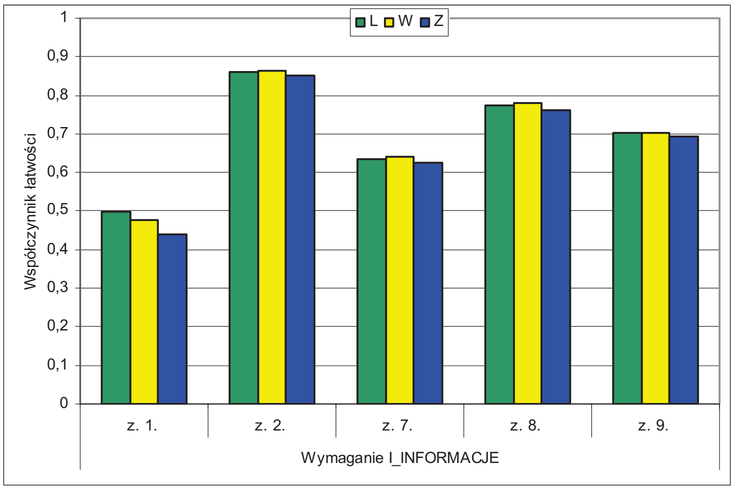
Wykres 4. przedstawia graficzny obraz poziomu opanowania wiadomości i umiejętności z matematyki, ujętych w pięć obszarów wymagań ogólnych w rozbiciu na poszczególne województwa. Poziom opanowania poszczególnych wymagań ogólnych wyznaczono w oparciu o współczynniki łatwości zadań poprzez które sprawdzano wiedzę z zakresu tychże wymagań.



Wykres 4. *Poziom opanowania obszarów pięciu wymagań ogólnych z matematyki*

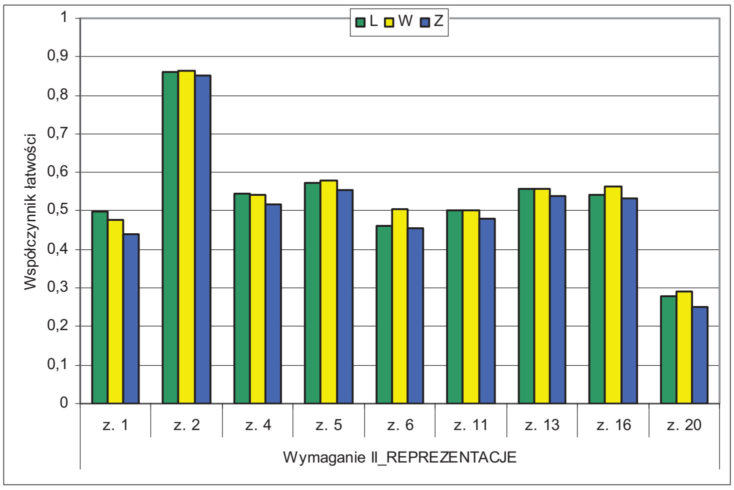
Analiza wykresu 4. pozwala stwierdzić, że jedynie wykorzystywanie i tworzenie informacji zostało przez gimnazjalistów opanowane na poziomie zadowalającym. Umiarkowaną trudność sprawiło zdającym modelowanie matematyczne oraz używanie i tworzenie reprezentacji. Najtrudniejsze okazało się wykorzystywanie i tworzenie strategii oraz rozumowanie i argumentacja.

Poziom oraz zróżnicowanie osiągnięć uczniów, ujętych w pięciu wymaganiach ogólnych z zakresu matematyki przedstawiono na wykresach 5. - 9.



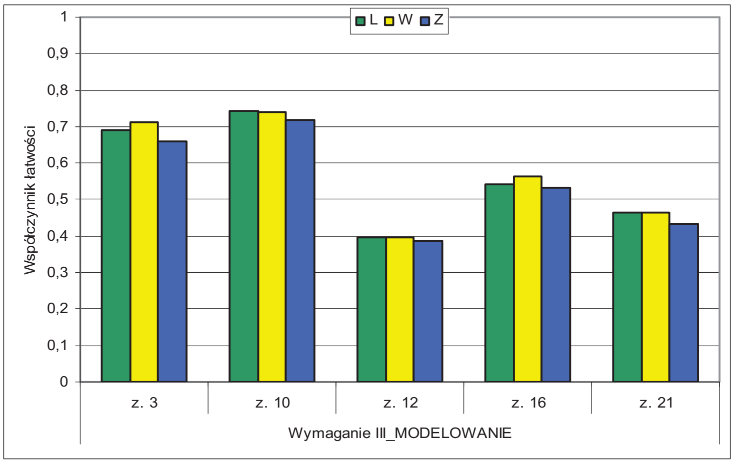
Wykres 5. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***I. wymagania ogólnego (wykorzystywanie i tworzenie informacji)***

Interpretowanie i tworzenie tekstów matematycznych oraz używanie języka matematycznego do opisu rozumowania to umiejętności złożone, które zdający opanowali na poziomie prawie zadowalającym. W tym zakresie gimnazjaliści w zadowalającym stopniu opanowali odczytywanie informacji z diagramu oraz wykresu liniowego (z.2., 8. i 9.). Interpretacja tekstu o charakterze matematycznym (z. 7.)sprawiła uczniom umiarkowaną trudność. Trudne okazało się zastosowanie pojęcia mediany.



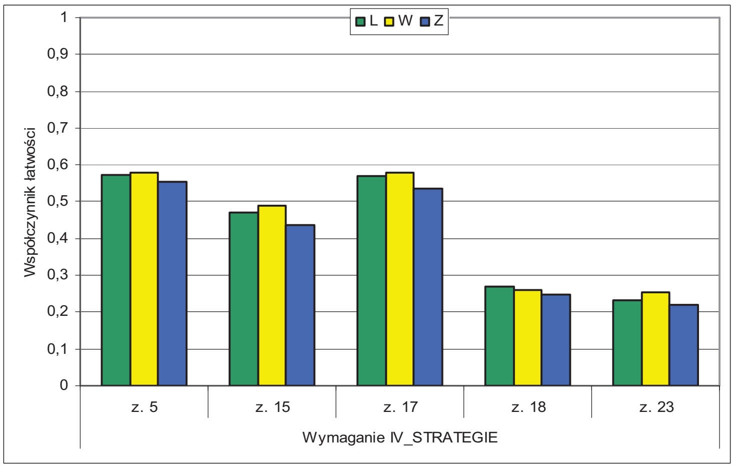
Wykres 6. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***II. wymagania ogólnego (wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji)***

Umiarkowanie trudne były dla uczniów umiejętności złożone, związane z używaniem prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych i operowaniem nimi. Uczniowie wciąż mają kłopoty z poprawnym wykonywaniem obliczeń na liczbach wymiernych (w tym z obliczeniami procentowymi) oraz stosowaniem definicji i twierdzeń w typowych kontekstach. Najtrudniejsze w ramach tego wymagania okazało się operowanie pojęciem objętości kuli.



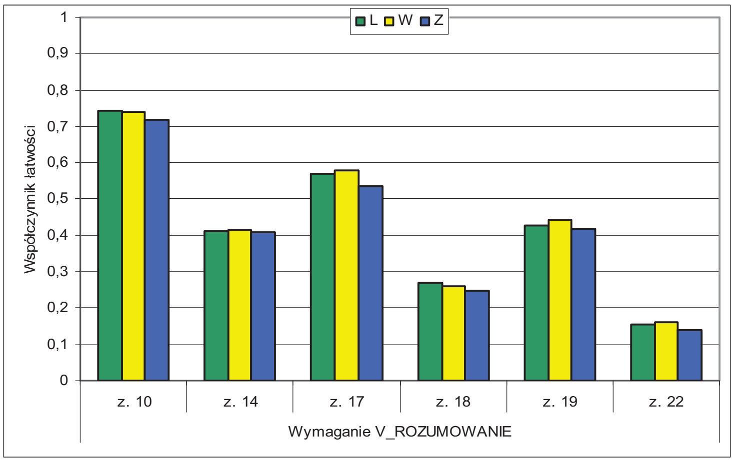
Wykres 7. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***III. wymagania ogólnego (modelowanie matematyczne)***

Dobieranie bądź budowanie modelu matematycznego do opisanej sytuacji, szczególnie praktycznej, okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne. Najtrudniejsze dla uczniów było wskazanie układu równań, będącego modelem matematycznym opisanej sytuacji praktycznej (z. 12.).



Wykres 8. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***IV. wymagania ogólnego (używanie i tworzenie strategii)***

Na niskim poziomie opanowano umiejętności szczegółowe w zakresie używania i stosowania strategii. Dużym problemem było dla gimnazjalistów ustalenie zależności między podanymi informacjami, zaplanowanie i wykonanie ciągu czynności prowadzących do rozwiązania problemu oraz krytyczna ocena otrzymanych wyników.



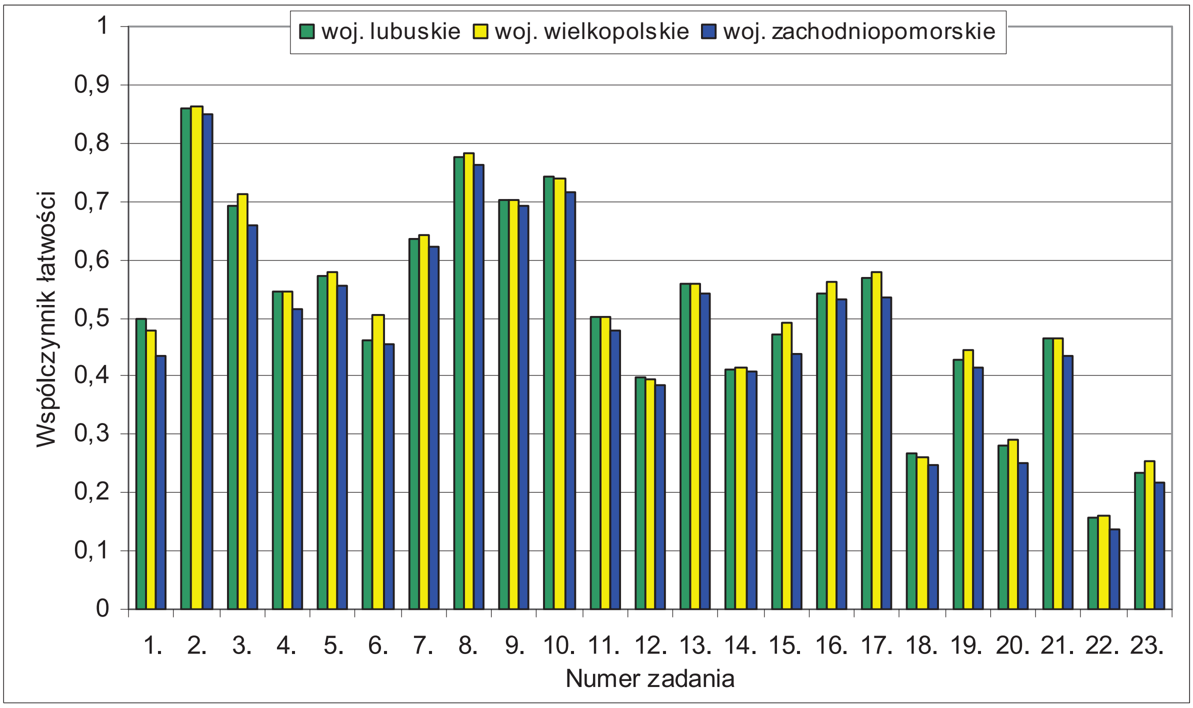
Wykres 9. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***V. wymagania ogólnego (rozumowanie i argumentacja)***

Bardzo różny jest stopień opanowania umiejętności szczegółowych, związanych z rozumowaniem i argumentacją. Gimnazjaliści w zadowalającym stopniu wykazali się umiejętnością porównywania prawdopodobieństw prostych zdarzeń losowych. Bardzo trudne okazało się przeprowadzenie prostego rozumowania i uzasadnienie jego poprawności.

3. Analiza stopnia opanowania umiejętności szczegółowych

Za miarę poziomu opanowania przez uczniów wiadomości i umiejętności badanych podczas egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki, a opisanych poprzez wymagania szczegółowe w podstawie programowej, przyjęto współczynniki łatwości zadań.

Wykres 10. przedstawia porównanie współczynników łatwości otrzymanych dla zadań z zakresu matematyki w poszczególnych województwach.



Wykres 10. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności z zakresu matematyki*

Najbardziej ogólnym wnioskiem, który nasuwa się po analizie współczynników łatwości zadań jest stwierdzenie, że nieznaczne są różnice w poziomie osiągnięć uczniów z województw leżących na terenie działania poznańskiej OKE. Chociaż porównując współczynniki łatwości poszczególnych zadań, obliczone dla województw, można zauważyć, że gimnazjaliści z Wielkopolski - w większości zadań - osiągnęli wyższe współczynniki łatwości niż uczniowie z województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego.

Przedstawione współczynniki łatwości zadań świadczą o tym, że poziom opanowania umiejętności matematycznych przez uczniów w Okręgu jest bardzo zróżnicowany. Interpretując wykres można wskazać zadania, które zdający rozwiązali na poziomie zadowalającym (są to zadania: 2., 8., 9. i 10.), jak również te zadania, które okazały się dla trzecioklasistów bardzo trudne (zadanie 22.). Treść wszystkich zadań wraz z komentarzem dotyczącym wyników przedstawiono na następnych stronach.

Porównując frakcję opuszczeń ze współczynnikiem łatwości zadań zamkniętych można stwierdzić, że liczba opuszczonych odpowiedzi nie zależy od stopnia trudności zadania.

3.a. Analiza odpowiedzi uczniów do zadań zamkniętych

Na kolejnych stronach podano treść zadań, badane umiejętności, wybieralność odpowiedzi oraz współczynniki łatwości i krótki komentarz.

Aby ułatwić analizę odpowiedzi, jakich udzielali uczniowie, wprowadzono skróty. Wyjaśnienie skrótów zastosowanych w opracowaniu:

BO	–	brak odpowiedzi	–	oznacza, że uczeń nie podjął próby rozwiązania zadania,
WO	–	wielokrotna odpowiedź	–	oznacza, że uczeń zaznaczył w karcie kilka odpowiedzi do jednego zadania,
T	–	tak	–	oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest trafne (uzasadnione),
N	–	nie	–	oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest nietrafne (nieuzasadnione),
P	–	prawda	–	oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za prawdziwe,
F	–	fałsz	–	oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za fałszywe,

Informacje do zadań 1. i 2.
W tabeli przedstawiono informacje dotyczące wieku wszystkich uczestników obozu narciarskiego.

Wiek uczestnika	Liczba uczestników
10 lat	5
14 lat	3
15 lat	4
16 lat	8

Zadanie 1. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Mediana wieku uczestników obozu jest równa

A. 14 lat. B. 14,5 roku. C. 15 lat. D. 15,5 roku.

Wymagania ogólne.
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 1.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odp.	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	10,00%	10,31%	12,04%		**0,50**	**0,48**	**0,44**
B.	34,65%	36,48%	37,54%				
C.*	**49,59%**	**47,58%**	**43,46%**		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	5,68%	5,47%	6,81%		**Zadanie okazało się dla zdających**		
BO	0,08%	0,15%	0,14%		**umiarkowanie trudne.**	**trudne.**	**trudne.**
WO	0,00%	0,01%	0,01%				

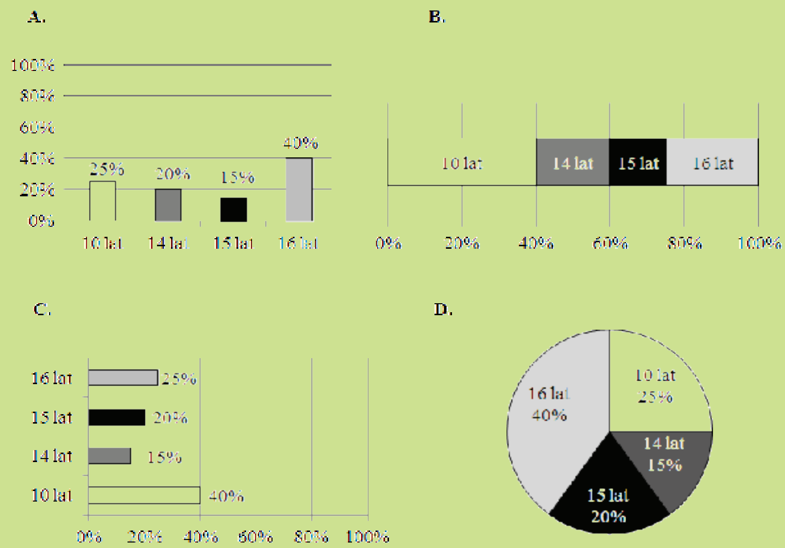
**pogrubienia w ramkach i tabelach oznaczają poprawną odpowiedź*

Komentarz

Aby poprawnie wykonać zdanie, najpierw należało zinterpretować informacje podane w postaci tabeli (obliczyć liczbę wszystkich uczestników obozu), a następnie wyznaczyć medianę zestawu danych. Jak wynika z wybieranych przez trzecioklasistów odpowiedzi, ponad połowa uczniów nie znało pojęcia „mediana", więc tym samym nie potrafili oni właściwie zinterpretować danych z tabeli w celu określenia mediany wieku uczestników obozu.

Zadanie 2. (0-1)

Na którym diagramie poprawnie przedstawiono procentowy podział uczestników obozu ze względu na wiek? Wybierz odpowiedź spośród podanych.



Wymagania ogólne.

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe.

9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa.
5. Procenty.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 2.						
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)				Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odp.	**L**	**W**	**Z**	**L**	**W**	**Z**
A.	9,29%	8,73%	10,97%	**0,86**	**0,86**	**0,85**
B.	2,49%	2,04%	2,21%			
C.	2,35%	2,26%	2,50%	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	**85,81%**	**86,89%**	**84,24%**	**Zadanie okazało się dla rozwiązujących łatwe.**		
BO	0,00%	0,05%	0,03%			
WO	0,06%	0,03%	0,04%			

Komentarz

W zadaniu wymagano obliczenia, jakim procentem wszystkich uczestników obozu są uczniowie mający odpowiednio 10, 14, 15 i 16 lat. Następnie należało wskazać diagram odpowiadający tym obliczeniom. Cieszyć może fakt, że ponad 85% gimnazjalistów w Okręgu nie miało kłopotów ze wskazaniem poprawnej odpowiedzi. Należy dodać, że zadanie okazało się najłatwiejszym zadaniem w całym arkuszu.

Zadanie 3. (0-1)

W pewnej hurtowni za 120 jednakowych paczek herbaty trzeba zapłacić 1500 zł.

Ile takich paczek herbaty można kupić w tej hurtowni za 600 zł, przy tej samej cenie za jedną paczkę? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 48 B. 50. C. 52 D. 56

Wymagania ogólne.
III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 3.						
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)				Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**	**L**	**W**	**Z**
A.	**69,77%**	**71,18%**	**65,35%**	**0,69**	**0,71**	**0,66**
B.	12,90%	12,76%	15,07%			
C.	11,50%	10,30%	12,39%	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	5,62%	5,57%	6,91%	**Zadanie okazało się dla piszących**		
BO	0,20%	0,18%	0,28%	**umiarkowanie trudne**	**łatwe.**	**umiarkowanie trudne.**
WO	0,00%	0,01%	0,00%			

Komentarz

W tym zadaniu uczniowie musieli wykazać się umiejętnością zbudowania modelu matematycznego do sytuacji osadzonej w kontekście praktycznym, czyli należało ustalić związek między wielkościami wprost proporcjonalnymi i wyznaczyć jedną z wielkości.

Można też było zadanie rozwiązać innymi sposobami, opartym na rozumieniu języka matematycznego oraz zastosowaniu prostych obliczeń na liczbach wymiernych. Na przykład: obliczyć cenę jednej paczki herbaty i sprawdzić, ile takich paczek można kupić za 600 zł lub ustalić, kiedy ułamki $\frac{600}{1500}$ *i* $\frac{\otimes}{120}$ *będą równe.*

Analizując wskazane przez rozwiązujących odpowiedzi można zauważyć, że lubuskim i wielkopolskim uczniom rozwiązanie zadania nie sprawiło problemów.

Zadanie 4. (0-1)
Cena brutto = cena netto + podatek VAT
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeżeli cena netto 1 kg jabłek jest równa 2,50 zł, a cena brutto jest równa 2,70 zł, to podatek VAT wynosi 8% ceny netto.	P	F
Jeżeli cena netto podręcznika do matematyki jest równa 22 zł, to cena tej książki z 5% podatkiem VAT wynosi 24,10 zł.	P	F

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe.
5. Procenty.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 4.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
PP	8,31%	8,71%	9,69%		**0,54**	**0,54**	**0,52**
PF	**56,51%**	**56,03%**	**54,32%**				
FP	18,41%	17,80%	20,88%		Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	16,50%	17,25%	14,88%		**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,18%	0,12%	0,10%				
WO	0,10%	0,09%	0,13%				

Komentarz

Umiejętność obliczeń procentowych to ważna umiejętność w życiu człowieka. Niestety, tegoroczni gimnazjaliści nie opanowali jej w zadowalającym stopniu. Obliczenia związane z podatkiem VAT poprawnie wykonało niewiele więcej niż połowa z nich.

Gdyby przyjrzeć się wyborowi odpowiedzi uczniowskich, to można stwierdzić, że:

- *pierwsze zdanie poprawnie oceniło ponad 64% zdających w każdym województwie (**P**P+**P**F),*
- *drugie zdanie poprawnie oceniło ponad 70% populacji we wszystkich województwach (P**F**+F**F**).*

Oznacza to, że uczniowie lepiej (w zadowalającym stopniu) opanowali obliczanie liczby na podstawie jej procentu aniżeli jakim procentem jednej liczby jest druga.

Jest to sygnał, że w szkołach należy wykonywać więcej obliczeń procentowych, szczególnie w kontekstach praktycznych, bowiem w gimnazjum uczniowie powinni poznać zasady wykonywania obliczeń procentowych.

Zadanie 5. (0-1)

Ile spośród liczb: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{10}{25}, \frac{1}{4}$ spełnia warunek $\frac{2}{5} < x < \frac{3}{5}$?

Wybierz odpowiedź spośród podanych.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe.

A. Jedna liczba. B. Dwie liczby. C. Trzy liczby. D. Cztery liczby.

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe.
Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.
Uczeń porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne).

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 5.						
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)				Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	**59,47%**	**60,42%**	**57,68%**	**0,57**	**0,58**	**0,55**
B.	30,43%	29,75%	31,68%			
C.	8,19%	7,82%	8,67%	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	1,80%	1,87%	1,86%	**Zadanie okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,08%	0,12%	0,11%			
WO	0,04%	0,01%	0,00%			

Komentarz

Zadaniem tym sprawdzano, czy gimnazjalista potrafi porównać ułamki zwykłe oraz czy właściwe interpretuje znaki nierówności. Umiejętności te są potrzebne w praktyce życia codziennego, np. przy szacowaniu. Wybór odpowiedzi świadczy o tym, że w każdym województwie około 90% gimnazjalistów zna sposoby porównywania ułamków (odpowiedzi A. i B.). Jednocześnie około 30 % zdających (wybór tylko odpowiedzi B.) nie potrafi posługiwać się znakami nierówności nieostrych, gdyż uznali oni, że ułamek $\frac{10}{25}$ *spełnia warunek podany w zadaniu. Stąd wniosek, aby na poziomie gimnazjum częściej (w kontekstach praktycznych) interpretować znaki nierówności, szczególnie nieostrych.*

Zadanie 6. (0-1)
Dane są liczby: $a = (-2)^{12}$, $b = (-2)^{11}$, $c = 2^{10}$.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Liczby te uporządkowane od najmniejszej do największej to:

A. *c, b, a.* B. *a, b, c.* C. *c, a, b.* D. *b, c, a.*

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe.
3. Potęgi.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 6.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	17,92%	16,76%	19,85%		**0,46**	**0,50**	**0,45**
B.	24,33%	22,59%	25,27%				
C.	11,13%	10,06%	10,31%		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	**46,43%**	**50,50%**	**44,47%**		**Zadanie okazało się dla trzecioklasistów**		
BO	0,20%	0,09%	0,10%		**trudne.**	**umiarkowanie trudne.**	**trudne.**
WO	0,00%	0,01%	0,00%				

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczniowie potrafią obliczać potęgi liczb wymiernych oraz czy potrafią porównywać potęgi o tych samych podstawach. Aby poprawnie wykonać zadanie, należało ustalić znaki potęg o podstawie ujemnej i wykładniku naturalnym (parzystym oraz nieparzystym. Wybór odpowiedzi B. przez co czwartego gimnazjalistę informuje, że ci zdający źle ustalili znak potęgi. Jest to sygnał, że w szkołach ponadgimnazjnych nie wystarczy przypomnieć działania na potęgach, ale należy taką umiejętność wykształcić.

Zadanie 7. (0-1)
Dane są liczby x i y spełniające warunki: $x < 0$ i $y < x$.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba y jest ujemna.	P	F
Liczba x jest większa od liczby y.	P	F

Wymagania ogólne.
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe.
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie).

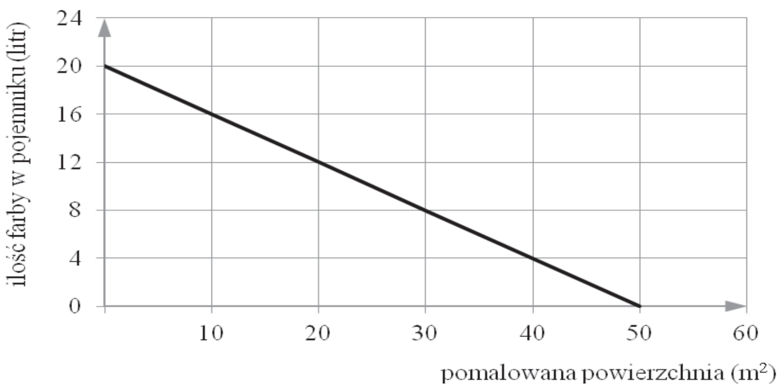
Analiza ilościowa i jakościowa zadania 7.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
PP	**64,92%**	**65,90%**	**62,93%**		**0,64**	**0,64**	**0,62**
PF	8,09%	8,44%	9,85%				
FP	16,79%	16,31%	16,83%		Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	10,02%	9,22%	10,20%		**Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.**		
BO	0,08%	0,04%	0,07%				
WO	0,10%	0,08%	0,13%				

Komentarz

Dla gimnazjalistów (w każdym województwie) łatwe było zarówno ustalenie znaku liczby y (wybór odpowiedzi ***P****P i* ***P****F – łącznie ponad 70%), jak i porównanie liczb x i y(wybór odpowiedzi P****P*** *i F****P*** *– łącznie ponad 80%). Ale poprawna ocena jednocześnie obu odpowiedzi sprawiła piszącym umiarkowaną trudność. Oznacza to, że uczniowie nie mają wykształconej umiejętności interpretacji zapisów algebraicznych, w których występują znaki nierówności nieostrych (co jest potwierdzeniem wniosku z zadania 5.).*

Informacje do zadań 8. i 9.

Wykres przedstawia zależność ilości farby pozostałej w pojemniku (w litrach) od powierzchni ściany (w m^2) pomalowanej farbą z tego pojemnika.



Zadanie 8.

Ile farby pozostało w pojemniku po pomalowaniu 30 m^2 ściany? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 8 litrów B. 12 litrów C. 16 litrów D. 20 litrów

Wymagania ogólne.

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe.

8. Wykresy funkcji.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 8.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	**76,89%**	**77,79%**	**75,60%**		**0,78**	**0,78**	**0,76**
B.	16,50%	15,40%	16,38%				
C.	4,76%	4,86%	5,97%		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	1,82%	1,93%	2,01%		**Zadanie okazało się dla rozwiązujących łatwe.**		
BO	0,04%	0,01%	0,01%				
WO	0,00%	0,00%	0,03%				

Komentarz

Odczytywanie i interpretacja wykresów funkcji to umiejętność niezbędna w dalszym kształceniu. Poziom opanowania tej umiejętności przez trzecioklasistów jest zadowalający. Należy jednak doskonalić odczytywanie informacji z wykresów, gdyż ponad 20% uczniów nie potrafiło poprawnie odczytać z wykresu, ile litrów farby pozostało w pojemniku.

Zadanie 9. (0-1)

Ile farby zużyto na pomalowanie 10 m^2 ściany? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 4 litry B. 8 litrów C. 10 litrów D. 16 litrów

Wymagania ogólne.

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe.

8. Wykresy funkcji.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 9.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	**70,94%**	**70,35%**	**70,08%**		**0,70**	**0,70**	**0,69**
B.	5,43%	5,41%	5,43%				
C.	1,68%	1,81%	1,94%		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	21,88%	22,37%	22,44%		**Zadanie okazało się dla piszących**		
BO	0,08%	0,06%	0,10%		**łatwe.**	**łatwe.**	**umiarkowanie trudne.**
WO	0,00%	0,00%	0,01%				

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi dokonać interpretacji wykresu liniowego. Uzyskany przez zdających wynik to dobry rezultat świadczący o tym, że umiejętność interpretacji wykresów została opanowana przez gimnazjalistów na poziomie zadowalającym. W przyszłości należałoby jeszcze więcej ćwiczyć interpretowanie wykresów (szczególnie z tych które opisują zjawiska występujące w życiu codziennym), ponieważ ponad 20% uczniów (wskazanie odpowiedzi D.) nie zrozumiało pytania i dokonało prostego odczytu, bez zinterpretowania odczytanych wielkości.

Zadanie 10. (0-1)
W pudełku było 20 kul białych i 10 czarnych. Dołożono jeszcze 10 kul białych i 15 czarnych.
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Przed dołożeniem kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej było trzy razy większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.	P	F
Po dołożeniu kul prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest większe niż prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.	P	F

Wymagania ogólne.
III. Modelowanie matematyczne.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 10.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
PP	2,64%	2,74%	3,42%
PF	13,56%	13,71%	16,71%
FP	8,72%	9,38%	9,29%
FF	**74,92%**	**74,02%**	**70,39%**
BO	0,04%	0,04%	0,03%
WO	0,12%	0,11%	0,17%

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,74	**0,74**	**0,72**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla gimnazjalistów łatwe.

Komentarz
Analiza opisanych doświadczeń losowych i poprawne określenie prawdopodobieństwa dwóch prostych zdarzeń losowych okazało się dla uczniów umiejętnością łatwą. Gdyby przyjrzeć się wyborowi odpowiedzi uczniowskich, to można stwierdzić, że:
- *pierwsze zdanie poprawnie oceniło ponad 83% populacji w województwie lubuskim i w województwie wielkopolskim, a w zachodniopomorskim prawie 80% (**F**P+**F**F),*
- *drugie zdanie poprawnie oceniło prawie 80% zdających we wszystkich województwach (P**F**+F**F**).*

Z przedstawionych faktów można wnosić, że tegoroczni absolwenci gimnazjów potrafią określać prawdopodobieństwo prostych zdarzeń losowych.

Zadanie 11. (0-1)

Średnia prędkość samochodu na trasie przebytej w czasie 4 godzin wyniosła 60 $\frac{km}{h}$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Aby czas przejazdu był o 1 godzinę krótszy, średnia prędkość samochodu na tej trasie musiałaby wynosić 80 $\frac{km}{h}$.	P	F
Gdyby średnia prędkość samochodu na tej trasie była równa 40 $\frac{km}{h}$, to czas przejazdu byłby równy 6 godzin.	P	F

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe.
Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.
Uczeń w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas przy danej drodze i danej prędkości.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 11.						
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)				Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**	**L**	**W**	**Z**
PP	**52,80%**	**52,95%**	**50,17%**	**0,50**	**0,50**	**0,48**
PF	15,04%	14,94%	16,35%			
FP	20,07%	19,47%	20,77%	Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	11,80%	12,34%	12,49%	**Zadanie okazało się dla uczniów**		
BO	0,18%	0,20%	0,10%	**umiarkowanie trudne.**	**umiarkowanie trudne.**	**trudne.**
WO	0,12%	0,10%	0,13%			

Komentarz

Zadaniem tym sprawdzano, czy uczeń rozumie zależności między wielkościami wprost proporcjonalnymi występującymi w życiu codziennym człowieka. Około 50% gimnazjalistów potrafiło (uwzględniając warunki zadania) obliczyć średnią prędkość samochodu oraz czas przejazdu. Są to umiejętności kształcone w szkole podstawowej, które gimnazjaliści powinni umieć stosować w każdej sytuacji. Aby właściwie ocenić zdania, wystarczyło:

- *w pierwszym zdaniu sprawdzić, czy* $60\frac{km}{h}\cdot 4h$ *jest tyle samo co* $80\frac{km}{h}\cdot 3h$,
- *w drugim zdaniu sprawdzić, czy* $60\frac{km}{h}\cdot 4h$ *jest tyle samo co* $40\frac{km}{h}\cdot 6h$.

Udzielane przez piszących odpowiedzi informują, że uczniowie nie znają podstawowego związku miedzy drogą, prędkością i czasem w ruchu jednostajnym.

Zadanie 12. (0-1)
Ania ma w skarbonce 99 zł w monetach o nominałach 2 zł i 5 zł. Monet dwuzłotowych jest 2 razy więcej niż pięciozłotowych.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę monet pięciozłotowych, a przez y – liczbę monet dwuzłotowych, to podane zależności opisuje układ równań

A. $\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 5y = 99 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 2x \\ 5x + 2y = 99 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2y \\ 5x + 2y = 99 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2y \\ 2x + 5y = 99 \end{cases}$

Wymagania ogólne.
III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe.
7. Równania.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 12.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	10,95%	11,54%	12,61%
B.	**40,73%**	**40,25%**	**38,44%**
C.	37,98%	38,14%	38,14%
D.	10,24%	10,00%	10,78%
BO	0,08%	0,06%	0,01%
WO	0,02%	0,01%	0,03%

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,40	**0,40**	**0,38**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla trzecioklasistów trudne.

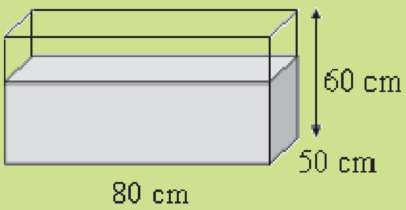
Komentarz

Poprawne wykonanie tego zadania wymagało powiązania informacji na temat przedstawionej sytuacji, a następnie wskazania układu równań będących jej modelem matematycznym.

Około 40% gimnazjalistów wskazało poprawną odpowiedź, ale co trzeci uczeń wybrał błędną odpowiedź C. Jest to tylko potwierdzeniem faktu, że uczniowie nie potrafią algebraicznie opisywać związków między różnymi wielkościami.

Zadanie 13. (0-1)

W prostopadłościennym akwarium, o wymiarach podanych na rysunku, woda sięga $\frac{2}{3}$ jego wysokości.



Ile litrów wody jest w akwarium? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 16000 litrów B. 1600 litrów C. 160 litrów D. 16 litrów

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe.
11. Bryły.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 13.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A	11,94%	13,23%	12,10%		**0,56**	**0,56**	**0,54**
B	17,46%	16,81%	17,74%				
C	**54,72%**	**55,47%**	**53,25%**		Interpretacja współczynnika łatwości		
D	15,73%	14,36%	16,73%		**Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.**		
BO	0,16%	0,14%	0,17%				
WO	0,00%	0,01%	0,01%				

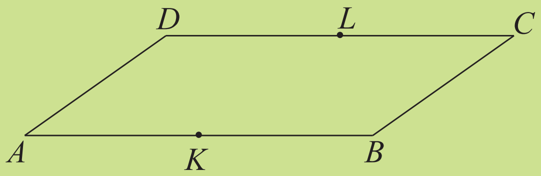
Komentarz

Zadaniem tym sprawdzano, czy uczniowie posiedli umiejętność obliczania objętości prostopadłościanu, a przede wszystkim, czy potrafią zamieniać jednostki objętości.

Rozkład wyboru odpowiedzi pokazuje, że uczniowie nie znają rachunku jednostek. W edukacji matematycznej należy pokazać uczniom, że rachunek jednostek może być ważną wskazówką przy ustalaniu sposobu rozwiązania zadania i istotnym elementem samooceny.

Zadanie 14. (0-1)

W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AD. Punkt K jest środkiem boku AB, a punkt L jest środkiem boku CD.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Trójkąt ABL ma takie samo pole, jak trójkąt ABD.	P	F
Pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta AKD.	P	F

Wymagania ogólne.
V. Rozumowanie i argumentacja.

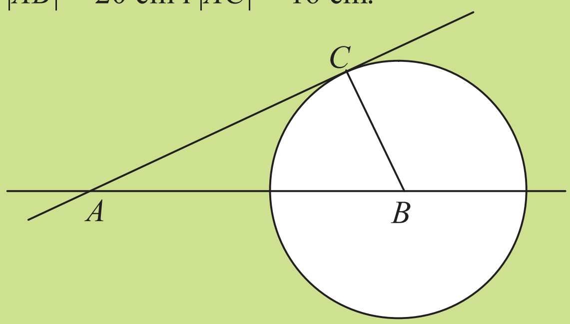
Wymagania szczegółowe.
10. Figury płaskie.
Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.
Uczeń zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 14.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
PP	**41,36%**	**41,54%**	**40,52%**		**0,41**	**0,41**	**0,41**
PF	13,24%	13,80%	13,84%				
FP	37,41%	37,29%	38,14%		Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	7,79%	7,17%	7,26%		**Zadanie okazało się dla piszących trudne.**		
BO	0,10%	0,11%	0,11%				
WO	0,10%	0,09%	0,13%				

Komentarz

*Aby dokonać poprawnej oceny podanych zdań, uczniowie powinni przeprowadzić proste rozumowanie w oparciu o podstawowe twierdzenie: jeżeli w trójkątach równe są długości boków i wysokości do nich poprowadzonych, to pola trójkątów są równe. Wskazanie przez około 45% populacji odpowiedzi **FP** i **FF** świadczy o tym, że w szkole podstawowej uczniowie nie posiedli wymaganej wiedzy. Należałoby więc (np. stosując czynnościowe metody nauczania matematyki) pozwolić uczniom w gimnazjum odkryć podane twierdzenie, zamiast wykonywania ćwiczeń polegających na stosowaniu wzorów na obliczanie pól figur płaskich. Aktualnym pozostaje apel „pozwólmy dzieciom myśleć”.*

Zadanie 15. (0-1)
Punkt B jest środkiem okręgu. Prosta AC jest styczna do okręgu w punkcie C, $|AB| = 20$ cm i $|AC| = 16$ cm.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Promień BC okręgu ma długość

A. 12 cm B. 10 cm C. 4 cm D. 2 cm

Wymagania ogólne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe.
10. Figury płaskie.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 15.						
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)				Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**	**L**	**W**	**Z**
A.	**47,85%**	**50,03%**	**44,09%**	**0,47**	**0,49**	**0,44**
B.	23,95%	23,23%	26,03%			
C.	23,62%	22,77%	25,42%	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	4,44%	3,86%	4,36%	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.**		
BO	0,12%	0,09%	0,10%			
WO	0,02%	0,01%	0,00%			

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zastosować dobrze znaną definicję (stycznej) oraz twierdzenie (Pitagorasa) w typowym kontekście. Słaby wynik zdających wskazuje, że uczniowie nie posiedli tych umiejętności. Wybór odpowiedzi B. i C. przez połowę populacji świadczy o tym, że uczniowie nie radzą sobie ze stosowaniem podstawowych pojęć i twierdzeń geometrycznych, a jest to umiejętność niezbędna w dalszym kształceniu.

Zadanie 16. (0-1)
Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę α, drugi ma miarę o $30°$ większą niż kąt α, a trzeci ma miarę trzy razy większą niż kąt α.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Trójkąt ten jest

A. równoboczny.
B. równoramienny.
C. rozwartokątny.
D. **prostokątny.**

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe.
7. Równania.
Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.
Uczeń stosuje twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 16.						
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)				Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**	**L**	**W**	**Z**
A.	4,62%	4,09%	5,12%	**0,54**	**0,56**	**0,53**
B.	6,67%	6,39%	7,33%			
C.	34,59%	33,36%	35,99%	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	**54,01%**	**56,07%**	**51,44%**	**Zadanie okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,10%	0,04%	0,10%			
WO	0,02%	0,04%	0,03%			

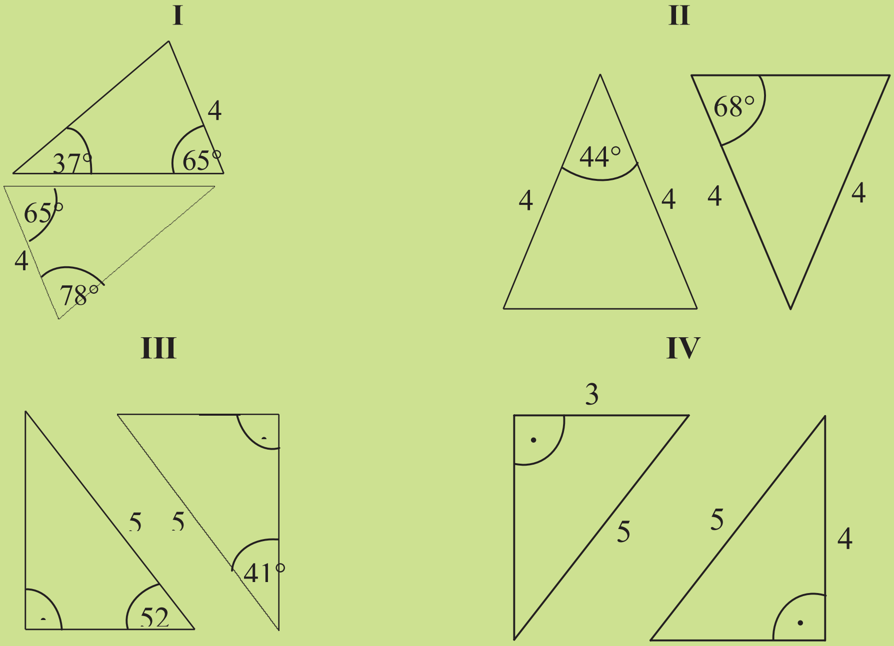
Komentarz

W zadaniu należało obliczyć miary katów trójkąta zgodnie z warunkami zadania, a następnie wskazać nazwę tego trójkąta. Aby poprawnie rozwiązać to zdanie, uczniowie powinni wykorzystać wiedzę zdobytą w szkole podstawowej. Uzyskany wynik ukazuje, że wiedzy tej nie posiadł nawet co drugi zdający.

Oznacza to, że uczniowie nie mieli ugruntowanej wiedzy i umiejętności w stosowaniu twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych trójkąta oraz w rozpoznawaniu i nazywaniu trójkątów.

Zadanie 17. (0-1)

Na rysunkach I–IV przedstawiono cztery pary trójkątów.



Na którym rysunku trójkąty <u>nie są</u> przystające? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. I B. II C. III D. IV

Wymagania ogólne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe.
10. Figury płaskie.
Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.
Uczeń stosuje twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta.

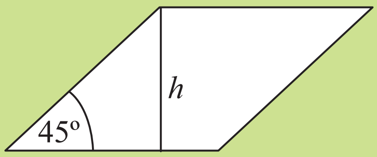
Analiza ilościowa i jakościowa zadania 17.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	L	W	Z		L	W	Z
A.	16,28%	16,33%	18,44%		**0,57**	**0,58**	**0,53**
B.	14,66%	14,17%	16,56%				
C.	**56,35%**	**57,39%**	**52,17%**		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	12,61%	11,95%	12,70%		**Zadanie okazało się dla trzecioklasistów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,08%	0,10%	0,07%				
WO	0,02%	0,06%	0,06%				

Komentarz

Zadanie sprawdzało umiejętność rozpoznania trójkątów przystających. W tym celu należało w rozumowaniu wykorzystać: cechy przystawania trójkątów, twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych w trójkącie, twierdzenie Pitagorasa i pojęcie trójkąta równoramiennego. Stosowanie zintegrowanej wiedzy do rozwiązania zadania okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne.

Zadanie 18. (0-1)

Kąt ostry rombu ma miarę 45°, a wysokość rombu jest równa h.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Pole tego rombu można wyrazić wzorem

A. $P = h^2$ B. $P = h^2\sqrt{2}$ C. $P = \frac{h^2\sqrt{2}}{2}$ D. $P = \frac{h^2\sqrt{3}}{4}$

Wymagania ogólne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe.
10. Figury płaskie.
6. Wyrażenia algebraiczne.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 18.

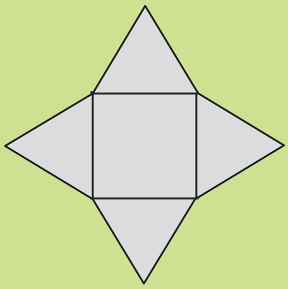
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	9,25%	9,13%	9,40%
B.	**31,63%**	**29,72%**	**28,64%**
C.	33,80%	35,10%	36,92%
D.	24,94%	25,75%	24,72%
BO	0,34%	0,27%	0,31%
WO	0,04%	0,02%	0,01%

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,27	**0,26**	**0,25**
Interpretacja współczynnika łatwości		
Zadanie okazało się dla piszących trudne.		

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zbudować model matematyczny sytuacji przedstawionej na rysunku, czyli czy potrafi wskazać wzór pozwalający obliczyć pole powierzchni narysowanego rombu. W tym celu najpierw należało ustalić długość boku tego rombu. Zauważenie, że powstały trójkąt jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym *pozwoliło na wyznaczenie długości boku rombu dwoma sposobami: jako długość przekątnej kwadratu o boku h lub jako długość przeciwprostokątnej w trójkącie o ramionach h. Tak więc najważniejsze było stworzenie strategii rozwiązania i w oparciu o nią przeprowadzenie odpowiedniego rozumowania. W każdym województwie większy był odsetek uczniów, którzy wskazali błędną odpowiedź C. od odsetka tych uczniów, którzy wskazali poprawną odpowiedź B. Ustalanie sposobu obliczania pola rombu to umiejętność, którą uczeń powinien posiąść na lekcjach matematyki w gimnazjum.*

Zadanie 19. (0-1)
Siatka ostrosłupa składa się z kwadratu i trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach tego kwadratu



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Wszystkie krawędzie tego ostrosłupa mają taką samą długość.	**P**	**F**
Wysokość tego ostrosłupa jest mniejsza niż wysokość jego ściany bocznej.	**P**	**F**

Wymagania ogólne.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe.
11. Bryły.
10. Figury płaskie.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 19.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
PP	**42,27%**	**44,58%**	**40,94%**		**0,43**	**0,44**	**0,42**
PF	51,44%	50,20%	53,38%				
FP	4,22%	3,33%	3,69%		Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	1,95%	1,74%	1,86%		**Zadanie okazało się dla uczniów trudne.**		
BO	0,04%	0,05%	0,01%				
WO	0,08%	0,09%	0,13%				

Komentarz
Zadanie trywialne. Mając rysunek i opis siatki ostrosłupa, należało ocenić podane zdania. Cieszy fakt, że poprawnego określenia długości wszystkich krawędzi ostrosłupa dokonało około 94% uczniów (od. ***PP*** *i* ***PF****). Niestety, niespełna 50% gimnazjalistów*

przystępujących do egzaminu wiedziało, że wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego jest zawsze większa od jego wysokość.
Uzyskany wynik sugeruje, że uczniowie własnoręcznie nie sklejali siatek ostrosłupów, a jest to podstawa do lepszego poznania brył.

Zadanie 20. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Suma objętości 8 kul, z których każda ma promień 1, jest taka sama jak objętość jednej kuli o promieniu

A. $8\sqrt{3}$ B. 8 C. $2\sqrt{2}$ D. 2

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe.
11. Bryły.

Analiza ilościowa i jakościowa zadania 20.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A	14,54%	13,44%	14,74%		**0,28**	**0,29**	**0,25**
B	36,66%	36,86%	39,21%				
C	19,75%	19,49%	20,23%		Interpretacja współczynnika łatwości		
D	**28,61%**	**29,90%**	**25,48%**		**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.**		
BO	0,41%	0,30%	0,34%				
WO	0,02%	0,02%	0,00%				

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi wyznaczyć promień kuli, gdy opisano jej objętość, czyli czy potrafi zastosować znany sposób postępowania (wzór na objętość kuli) w typowym kontekście. Analizując wybór odpowiedzi uczniowskich można stwierdzić, że w każdym województwie:
- *ponad 25% gimnazjalistów wskazało poprawną odpowiedź,*
- *ponad 30% populacji nie znało sposobu obliczania objętości kuli (odpowiedzi A. i C.);*
- *prawie 40% uczniów zastosowało właściwy wzór pozwalający obliczyć objętość kuli, ale „zapomnieli", że wyznaczona liczba 8 jest sześcianem promienia. Świadczy to tym, że uczniowie ci nie są wdrożeni do krytycznej oceny uzyskanych rezultatów.*

3.b. Analiza odpowiedzi uczniów do zadaniach otwartych wraz z przykładami rozwiązań uczniowskich

Jak już wspomniano, za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych zdający mógł otrzymać maksymalnie 9 punktów. W tabeli poniżej przedstawiono, jaki procent wszystkich uczniów danego województwa uzyskał za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych maksymalną liczbę punktów, a jaki zero punktów. Dodajmy, że zero punktów otrzymywali zarówno ci uczniowie, którzy źle rozwiązali zadanie, jak i ci, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania.

województwo	Odsetek uczniów, którzy za rozwiązanie zadań otwartych otrzymali		
	maksymalną punktację (9 pkt)	0 pkt	
		ogółem	w tym opuszczono wszystkie zadania otwarte
lubuskie	**3,46%**	**34,38%**	**8%**
wielkopolskie	**3,40%**	**33,66%**	**6%**
zachodniopomorskie	**3,07%**	**38,18%**	**7%**

Zakłada się, że w każdym rozkładzie normalnym zbliżony procent populacji osiąga wyniki najwyższe, jak i najniższe. Tymczasem za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych w województwie lubuskim i wielkopolskim zero punktów otrzymywało około dziesięć razy więcej zdających w porównaniu z tymi, którzy uzyskali maksymalną liczbę punktów. Natomiast w województwie zachodniopomorskim dwanaście razy więcej uczniów uzyskało zero punktów niż maksymalną liczbę.

Zastanawiający jest fakt, wymagający głębszej refleksji w szkołach, że spośród tych uczniów, którzy za wszystkie zadania otwarte otrzymali zero punktów co czwarty zdający w województwie lubuskim, co szósty w województwie wielkopolskim i co piaty w województwie zachodniopomorskim opuścił rozwiązania wszystkich zadań otwartych.

Warto przeanalizować, jaki odsetek uczniów uzyskiwał najniższą i najwyższą liczbę punktów za rozwiązanie zadań otwartych w kontekście lokalizacji szkoły.

województwo	Odsetek uczniów, którzy uczęszczali do gimnazjum położonego							
	na wsi		w małym mieście (do 20 tys.)		w średnim mieście (od 20 – 100 tys.)		w dużym mieście (powyżej 100 tys.)	
	i uzyskali za rozwiązanie zadań otwartych							
	0 pkt	9 pkt	0 pkt	9 pkt	0 pkt	9 pkt	0 pkt	9 pkt
lubuskie	**38,6%**	**1,7%**	**37,0%**	**2,8%**	**34,5%**	**3,7%**	**28,5%**	**6,2%**
wielkopolskie	**34,4%**	**2,7%**	**37,8%**	**2,7%**	**33,9%**	**3,7%**	**27,6%**	**6,1%**
zachodniopomorskie	**45,7%**	**1,4%**	**40,7%**	**1,8%**	**40,3%**	**2,6%**	**30,6%**	**6,3%**

W każdym województwie maksymalną liczbę punktów za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych uzyskiwali najczęściej gimnazjaliści uczęszczający do szkół w dużych miastach, a najrzadziej uczęszczający do szkół położonych w małych miastach. Jednocześnie w województwie lubuskim i wielkopolskim najczęściej zero punktów otrzymywali zdający, którzy uczęszczali do szkół w małych miastach, a w województwie zachodniopomorskim uczniowie ze szkół wiejskich.

Zadanie 21. (0-3)
W pewnej klasie liczba chłopców stanowi 80% liczby dziewcząt. Gdyby do tej klasy doszło jeszcze trzech chłopców, to liczba chłopców byłaby równa liczbie dziewcząt. Ile dziewcząt jest w tej klasie? Zapisz obliczenia.

Wymagania ogólne
III. Modelowanie matematyczne.

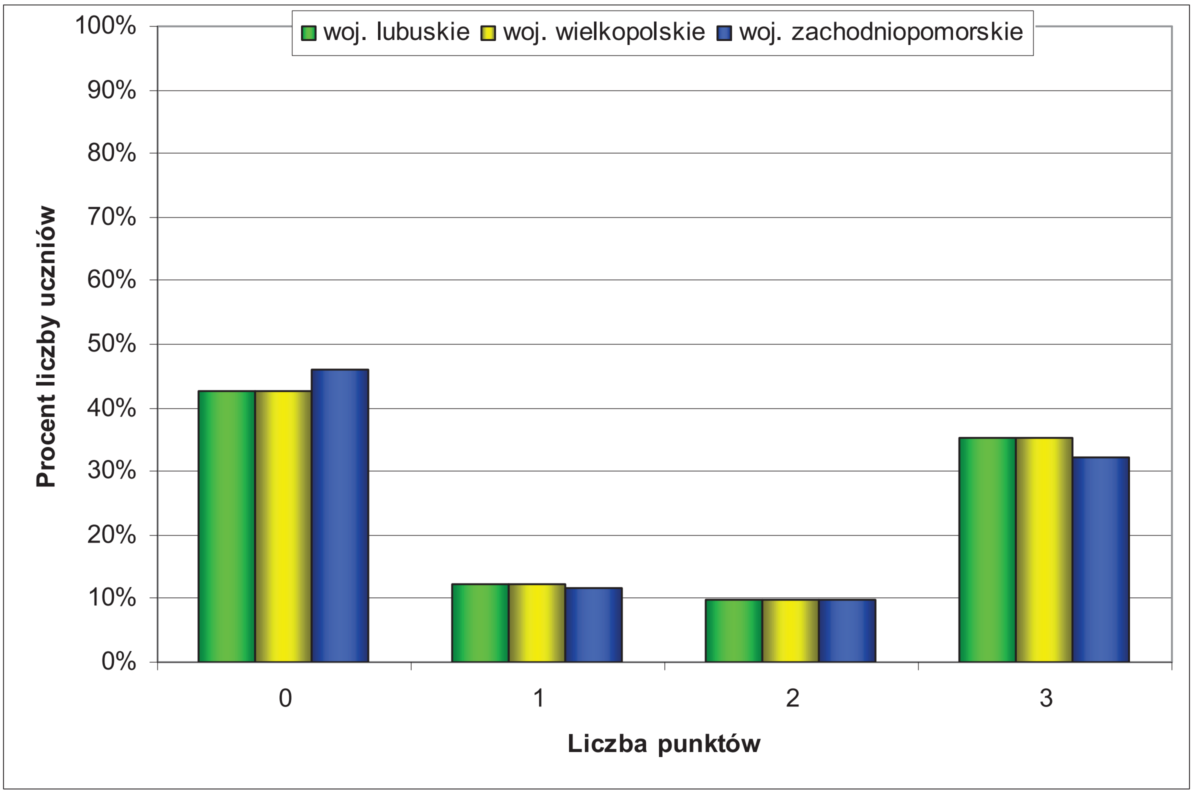
Wymagania szczegółowe
5. Procenty. Uczeń:
2) oblicza procent danej liczby.
7. Równania. Uczeń:
7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Poziom wykonania zadania 21.
Maksymalną liczbę punktów (3 pkt) uzyskało 34,5% populacji w Okręgu.
Zero punktów otrzymało 43,6% trzecioklasistów w Okręgu, z czego 10% nawet nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 21.	**L**	**W**	**Z**
Średnia liczba punktów (max – 3 pkt)	1,39 pkt	1,40 pkt	1,30
Średni wynik procentowy	46,4%	46,5%	43,4%
Współczynnik łatwości	0,46	0,47	0,43
Interpretacja współczynnika łatwości	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.**		

Zestawienie liczby uczniów, którzy otrzymali 3 lub 2 lub 1 lub 0 punktów.

Liczba punktów	**Procent liczby uczniów**, którzy uzyskali określoną liczbę punktów w woj.:		
	lubuskim	wielkopolskim	zachodniopomorskim
3	35,19%	35,29%	32,30%
2	9,92%	9,82%	9,95%
1	12,12%	12,14%	11,60%
0	42,77%	42,75%	46,15%
w tym BO	13%	9%	11%



Wykres 11. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 21.*

Komentarz

W zadaniu sprawdzano, czy uczeń potrafi zbudować model matematyczny prowadzący do rozwiązania zadania osadzonego w kontekście praktycznym. W tym celu należało ustalić zależności między wielkościami, zaplanować i wykonać ciąg czynności prowadzących do rozwiązania problemu, precyzyjnie przedstawić przebieg swojego rozumowania oraz zinterpretować otrzymane wyniki. Zadanie wymagało przede wszystkim zrozumienia treści przedstawionej słownie, a następnie wykazania się umiejętnością obliczania procentu danej liczby. Fakt, że znaczna część gimnazjalistów nie zdołała poprawnie rozwiązać tego zadania wskazuje, że w kształceniu matematycznym należy zwracać większą uwagę na interpretację treści zadania i kształcenia rozumienia podstawowych pojęć matematycznych. Na lekcji uczeń powinien mieć możliwość zapoznania się z różnymi sposobami rozwiązywania zadań, warto więc korzystać z zadań dotyczących sytuacji praktycznych, w których uczeń sam będzie szukał strategii rozwiązania zadania.

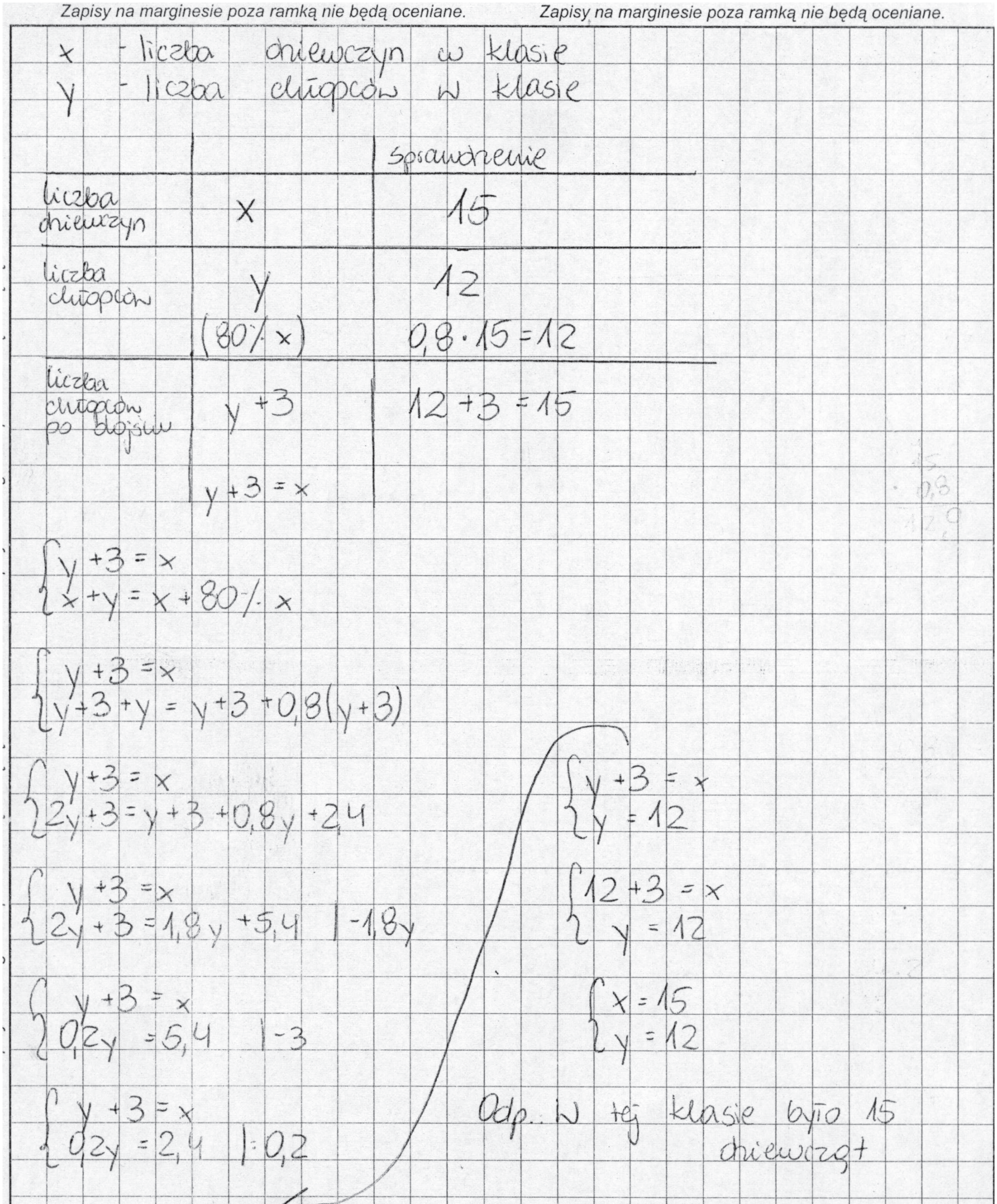
Rozwiązania uczniowskie

Rozwiązujący to zadanie wykazali się niezwykłą inwencją, zarówno w tworzeniu strategii, jak przedstawianiu linii swojego rozumowania.

<u>Odpowiedzi poprawne</u> (przykłady: 1. – 11.)

Przykład 1.

Ułożenie i rozwiązanie **układu równań** w celu obliczenia liczby dziewcząt w klasie to algebraiczny i najczęściej spotykany sposób rozwiązania. W poniższym przykładzie przejrzysta analiza, właściwe rozwiązanie układu równań oraz sprawdzenie warunków zadania nie pozostawiają wątpliwości, że uczeń zaplanował rozwiązanie i potrafił je zinterpretować.



Zapisy na marginesie poza ramką nie będą oceniane. Zapisy na marginesie poza ramką nie będą oceniane.

x - liczba dziewczyn w klasie
y - liczba chłopców w klasie

		sprawdzenie
liczba dziewczyn	x	15
liczba chłopców	y $(80\%\, x)$	12 $0{,}8\cdot 15=12$
liczba chłopców po dojściu	$y+3$ $y+3=x$	$12+3=15$

$$\begin{cases} y+3=x \\ x+y=x+80\%\, x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3=x \\ y+3+y=y+3+0{,}8(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3=x \\ 2y+3=y+3+0{,}8y+2{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3=x \\ 2y+3=1{,}8y+5{,}4 \quad |-1{,}8y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3=x \\ 0{,}2y=5{,}4 \quad |-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3=x \\ 0{,}2y=2{,}4 \quad |:0{,}2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+3=x \\ y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12+3=x \\ y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=15 \\ y=12 \end{cases}$$

Odp. W tej klasie było 15 dziewcząt

Przykład 2.
Zdający w prosty sposób doszli do rozwiązania problemu, wykorzystując proste **równanie** będące modelem matematycznym treści oraz logicznie wnioskowanie.

liczba dziewcząt d
liczba chłopców – 0,8 d

$30:2=15$

$0,8d + 3 = d$

$3 = 0,2d \quad | : 0,2$
$d = 15$

Odp: W tej klasie jest 15 dziewcząt. ✓

Przykład 3.
Algebraiczny zapis treści i logiczne rozumowanie doprowadziły wprawnego matematyka do szybkiego rozwiązania problemu.

ch – liczba chłopców
d – liczba dziewcząt
k – liczba osób w klasie

$ch + d = k$
$ch = 0,8d$
$k = 1,8d$

$(ch+3)+d = k = 2d$
↓

$2d - 1,8d = 3$
$0,2d = 3 \quad | \cdot 5$
$d = 15$

Odp: W klasie jest piętnaście dziewcząt.

Strategia następnych trzech rozwiązań oparta jest o **własności wielkości wprost proporcjonalnych**. Zadania jasno przedstawiają tok rozumowania gimnazjalistów.

Przykład 4.

20% - 3 chł.

$20\% - 3$
$80\% - x$

$x = \frac{8\cancel{0} \cdot 3}{2\cancel{0}}$

$x = \frac{24}{2}$

$x = 12$ chł

80% - 12 chł.
100% - 15 chł.

W klasie jest 15 dziewcząt i 12 chłopców, po dołożeniu 3 chł. było by ich po równo

Przykład 5.

dziewczyny - x

chłopcy - x-3

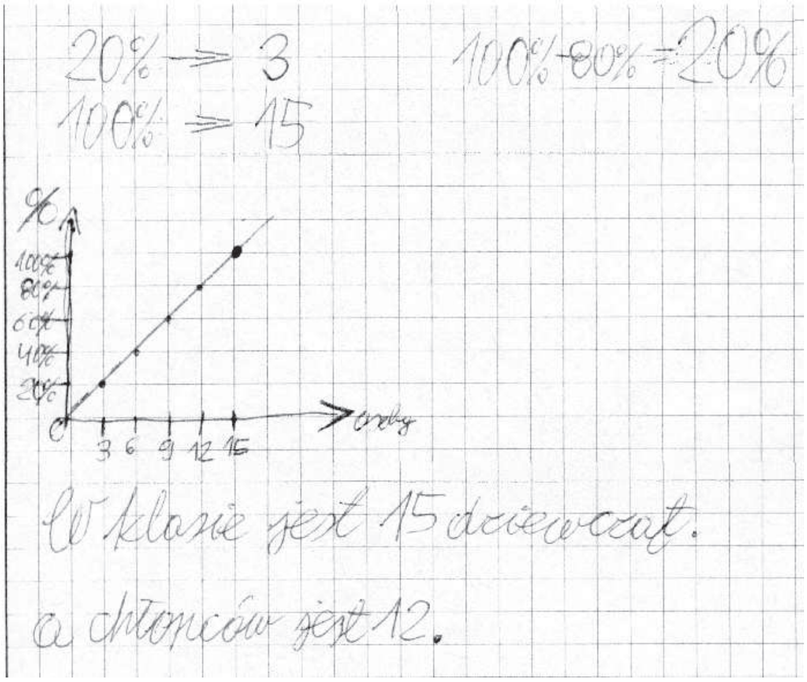
x	100%
$x-3$	80%

$\frac{x}{x-3} = \frac{100}{80}$

$80x = 100(x-3)$
$80x = 100x - 300$
$300 = 100x - 80$
$30\cancel{0} = 2\cancel{0}x \; |:2\cancel{0}$
$x = 15$

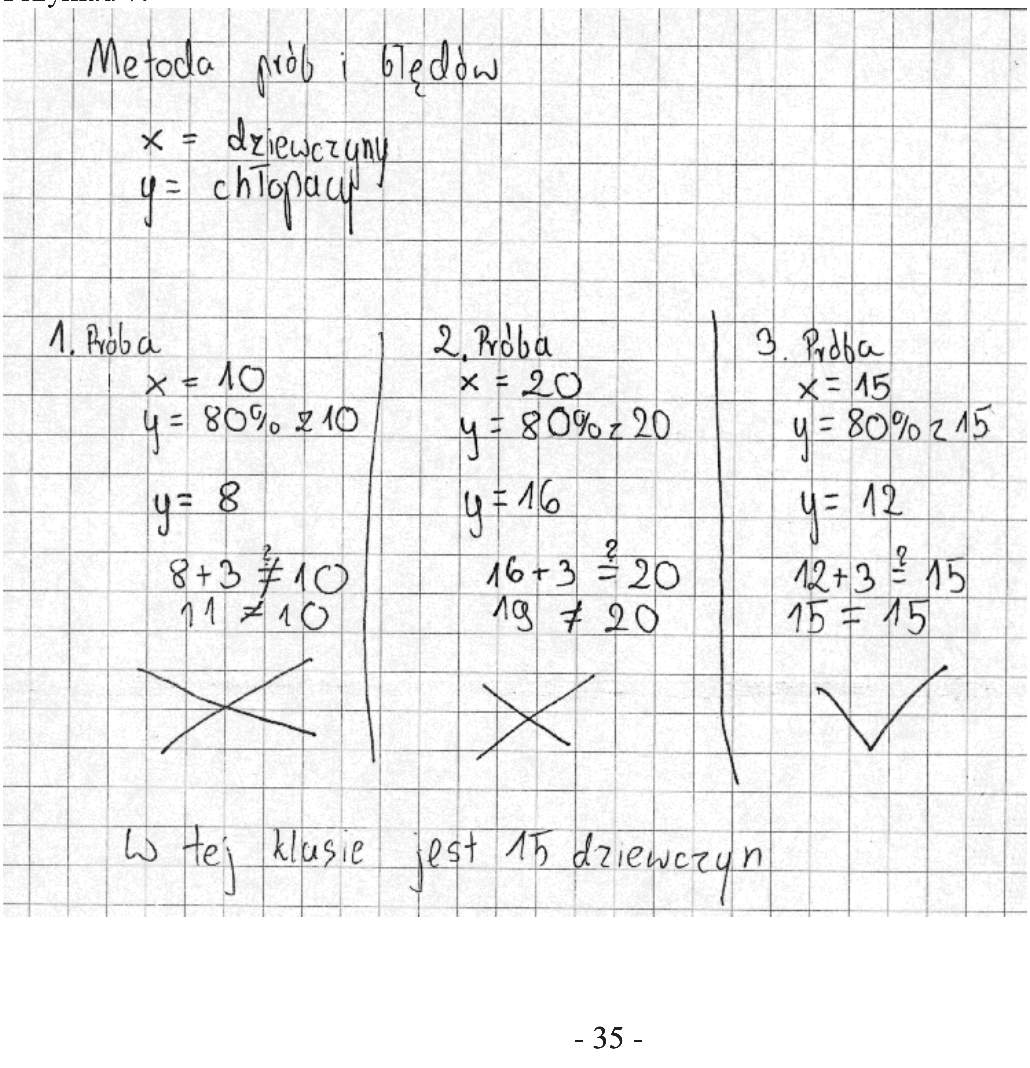
Odp: W tej klasie jest 15 dziewcząt.

Przykład 6.



Gimnazjaliści określali liczbę dziewcząt w klasie stosując **metodę prób i błędów**, czyli stosując oparty na intuicji sposób rozwiązywania problemów.

Przykład 7.



Przykład 8.

Dane:

Liczba chłopców stanowi 80% liczby dziewczyn

chłopcy + 3 chłopców = dziewczyny

chłopcy - x

dziewczyny - y

dziewczyny	chłopcy to 80% dziewczyn	+ do chłopców 3	tyle samo dziewczyn i chłopców dziewczyny = chłopcy
10	8	11	10 ≠ 11 —
12	9,6 —		
14	11,2 —		
15	12	15	15 = 15

Odp: W tej klasie jest 15 dziewczyn.

Spośród tych, którzy rozwiązali zadanie, znaczna grupa przedstawiła bardzo jasne i logiczne wyjaśnienie. W poniższych rozwiązaniach widać nietuzinkowe myślenie zdających, którzy po dokonaniu analizy otrzymywali gotowy wniosek.

Przykład 9.
Ciekawa analiza i w logiczny sposób wywiedziony ostateczny wniosek.

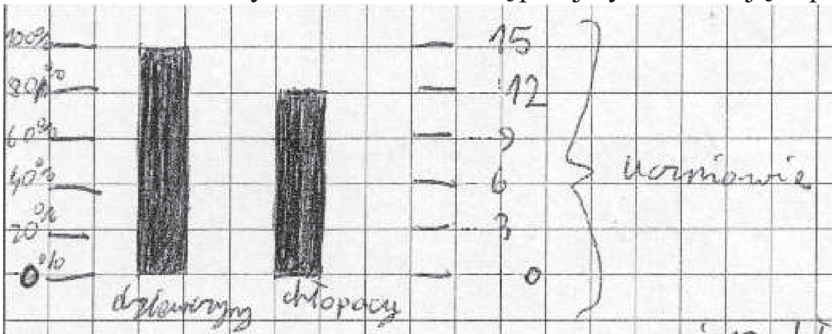
LICZBA CHŁOPCÓW 80% LICZBY DZIEWCZ. jeżeli w klasie dojdzie 3 chłopców to liczba dziewczyn i chłopców byłaby taka sama, więc chłopcy stanowiliby 100% liczby dziewcz. Czyli, jeżeli stanowią oni 80% liczby dziewczyn to ci trzej którzy by doszli stanowiliby 20% liczby dziewcz. bez tych 80%. Wychodzi na to że 3 chłopców = 20% liczby dziewcz. PRZYPUSZCZAJĄC: CHŁOPCÓW W KLASIE JEST 12 A DZIEWCZĄT 15.

OBLICZENIA

liczba chłopców = 80% liczby dziewcz.
3 chłopców stanowi 20% liczby dziewcz.
więc $20\% \times 4 = 80\%$, czyli $3 \cdot 4 = 12$, gdyby doszło trzech stanowiliby 100% liczby dziewcząt, czyli 15. Z czego wynika, że dziewczyn w klasie jest 15.

Odp. W klasie było 12 chłopców i 15 dziewczyn, czyli klasa liczyła 27 osób. $15 - 3 = 12$ chłop.

Przykład 10.
Oto przykład rozwiązania, w którym wykorzystano diagram słupkowy do przedstawienia toku rozumowania. Wszystkie oznaczenia są przejrzyste i oddają w pełni rozumowanie autora.



i 12 chłopców
odp. W klasie jest 15 dziewczyn i 12 chłopców, jeżeli do nich dojdzie 3 chłopców liczba będzie równa tyle ile jest dziewczyn.

Przykład 11.
Rozwiązanie ciekawe, nietypowe, a jednocześnie dokładnie oddające tok rozumowania.

liczba chłopców - 80%x

liczba dziewcząt - x

3 chłopców = 20%

80% + 20% = 100%

(20 + 20 + 20 + 20)% = 80%

3 + 3 + 3 + 3 = 12 chłopców

12 + 3 = 15

Odp: Dziewcząt w tej klasie jest 15.

Przykład 12.
Praca ucznia z orzeczoną dysleksją przedstawia rozwiązanie zaawansowane matematycznie. Można dostrzec biegłość w stosowaniu pojęcia procent. Szkoda, że uczeń nie dopisał zdania wyjaśniającego, iż 20% połowy uczniów to tyle samo co 10% całej klasy.

~~x - liczba dzieci~~
~~0,8x - liczba chłopców~~
~~x - liczba dziewcząt~~

x - liczba wszystkich dzieci
0,4x - liczba chłopców
0,5x - liczba dziewczyn
3 - chłopcy którzy doszli do klasy

$0{,}4x + 0{,}5x + 3 = x$

$0{,}9x + 3 = x$

$3 = 0{,}1x \quad /:0.1$

$x = 30$

$x = 30$

$30 : 2 = 15$

odp. W tej Klasie jest 15 dziewczyn ponieważ w całej klasie jest 30 uczni a ich połowe stanowiom dziewczyny.

<u>Odpowiedzi częściowo poprawne</u> (przykłady: 13. – 17.)

Przykład 13.
W poniższym przykładzie uczeń poprawnie ustalił zależności występujące w zadaniu i dobrze ułożył układ równań. Jednak błąd rachunkowy ($x - 0{,}8x = 0{,}3x$) pozbawił go satysfakcji z otrzymania poprawnego wyniku. Warto więc wdrażać uczniów do krytycznej oceny otrzymanych wyników poprzez sprawdzanie warunków zadania; w tym rozwiązaniu uczeń zauważyłby wtedy, że siedmiu chłopców (10 – 3 = 7) nie stanowi 80% liczby dziewcząt, którą obliczył (10) i miałby szansę dokonać autokorekty.

Liczba chłopców = 80% liczby dziewcząt
x - liczba dziewcząt
y - liczba chłopców

$$\begin{cases} y = 80\% x \\ y + 3 = x \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ 0{,}8x + 3 = x \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ 3 = 0{,}3x \quad |:0{,}3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0{,}8x \\ x = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0{,}8 \cdot 10 \\ x = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 8 \\ x = 10 \end{cases}$$

Odp.: W tej klasie jest 10 dziewcząt.

Dwie kolejne prace pokazują, że uczniowie nie poradzili sobie z rozwiązaniem układu równań (przy poprawnym ustaleniu zależności).

Przykład 14.

Rozwiązujący poprawnie zapisał zależności (układ równań) i na tym zakończył.

y - dziewczęta
x - chłopcy

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ x + 3 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}y + 3 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}y \\ -\frac{1}{5}y = 3 \end{cases}$$

Przykład 15.

W tym rozwiązaniu zapis układu równań jest poprawny, ale uczeń w trakcie rozwiązywania układu równań popełnia podstawowe błędy.

Analiza:
l. chłopców → 80% liczby dziewcząt
l. chłopców - x
l. dziewczyn - y

$$\begin{cases} x = 80\% \cdot y \\ x + 3 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{80}{100}y \\ x + 3 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{80}{100}y \\ \frac{80}{100}y + 3 = y \end{cases} \quad / \cdot \frac{100 \cdot 1}{80 \cdot y}$$

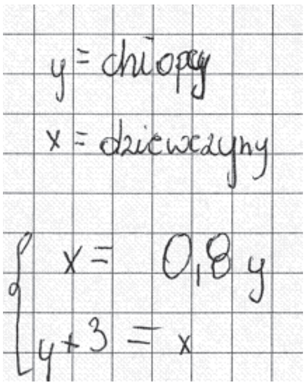
$$\begin{cases} x = \frac{80}{100}y \\ \cancel{\frac{80}{100}}y \cdot \cancel{\frac{100}{80y}} + 3 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{80}{100}y \\ 3 = y \end{cases}$$

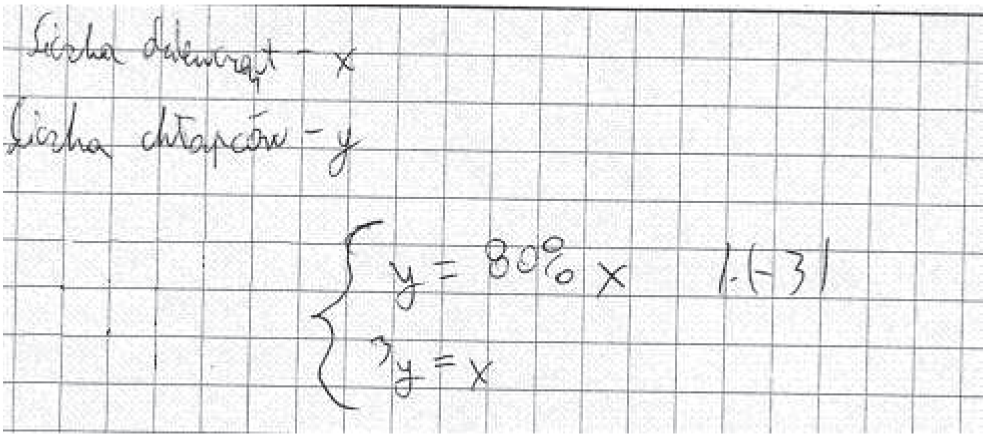
$$\begin{cases} x = \frac{80}{100} \cdot 3 = \frac{160}{100} = 1,6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Często spotykanym błędem było ułożenie układu równań, w którym tylko jedno równanie było poprawne. Oznacza to, że gimnazjaliści poprawnie interpretowali tylko jedno zdanie.

Przykład 16.
W tym przykładzie zdający zapisał, że liczba dziewczyn stanowi 80% liczby chłopców, co jest sprzeczne z treścią zadania.



Przykład 17.
Ten rozwiązujący poradził sobie z interpretacją pierwszego zdania w treści, ale myli porównanie różnicowe („o ile") z ilorazowym („ile razy").



<u>Odpowiedzi błędne</u> (przykłady: 18. – 20.)

Przykład 18.
W wielu rozwiązaniach uczniowie nie potrafili algebraicznie zapisać zależności występujących między wielkościami. Tak jak w przykładzie poniżej, rozwiązujący zupełnie nie zrozumiał związku między liczbą chłopców i dziewczyn, który opisano w zadaniu. Potrafił jedynie zapisać trywialne stwierdzenie, że suma liczby chłopców i dziewczyn to liczba uczniów w klasie; chociaż zapis tego związku był zbędny w tym zadaniu. Jednocześnie wprowadzenie trzech niewiadomych spowodowało, że uczeń nie poradził sobie z rozwiązaniem.

x - liczba chłopców
y - liczba dziewczyn
z - liczba uczniów w klasie

$x + y = z$

$x + \frac{8}{10} y = z$

$\frac{8}{10} y + 3 = x$

Przykład 19.
Były też rozwiązania, w których gimnazjaliści w oparciu o niepoprawną analizę treści rozwiązywali ułożony układ i interpretowali otrzymane wyniki bez krytycznej ich oceny.
Np. w poniższym przykładzie uczeń powinien dokonać autokorekty, gdyby zastanowił się że w „jego klasie" jest aż 50 dziewczyn.

x - ~~chłopy~~ chłopcy
y - dziewczyny

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ y = 3x \end{cases}$$

$x + 3x = 80$

$4x = 80 \quad |:4$

$x = 20$

$y = 3 \cdot 20$

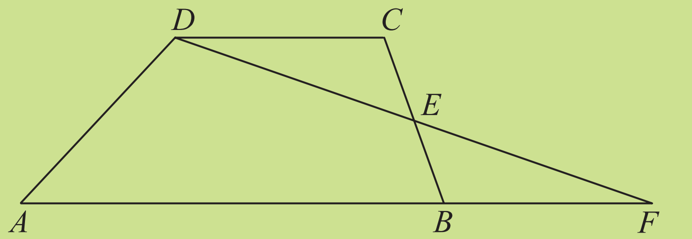
$y = 50$

$$\begin{cases} x = 20 \text{ - chłopcy} \\ y = 50 \text{ - dziewczyny} \end{cases}$$

Odp.: W klasie było 50 dziewczyn

Zadanie 22. (0-2)

Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$ i trójkąt AFD. Punkt E leży w połowie odcinka BC. Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ i pole trójkąta AFD są równe.



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)

V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)

10. Figury płaskie. Uczeń:
9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;
14) stosuje cechy przystawania trójkątów.

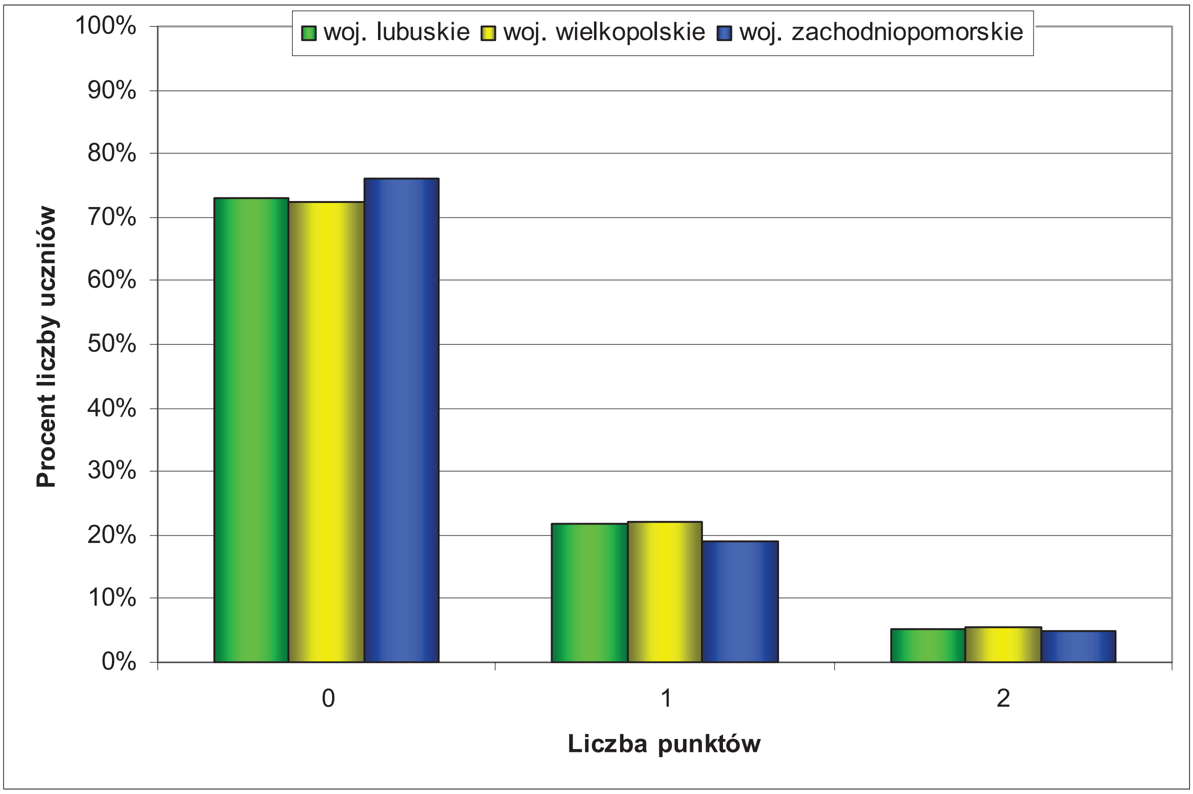
Poziom wykonania zadania 22.

Maksymalną liczbę punktów (2 pkt) uzyskało 5,3% populacji w Okręgu.
Zero punktów otrzymało 73,4% trzecioklasistów, a aż 22% zdających w Okręgu nawet nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 22.	**L**	**W**	**Z**
Średnia liczba punktów (max – 2 pkt)	0,31 pkt	0,32 pkt	0,28 pkt
Średni wynik procentowy	15,6%	16,2%	13,8%
Współczynnik łatwości	0,16	0,16	0,14
Interpretacja współczynnika łatwości	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów bardzo trudne.**		

Zestawienie liczby uczniów , którzy otrzymali 2 lub 1 lub zero punktów.

Liczba punktów	**Procent liczby uczniów**, którzy uzyskali określoną liczbę punktów w woj.:		
	lubuskim	wielkopolskim	zachodniopomorskim
2	5,35%	5,53%	4,68%
1	21,67%	22,16%	19,12%
0	72,98%	72,31%	76,02%
w tym BO	28%	21%	22%



Wykres 12. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 22.*

Komentarz

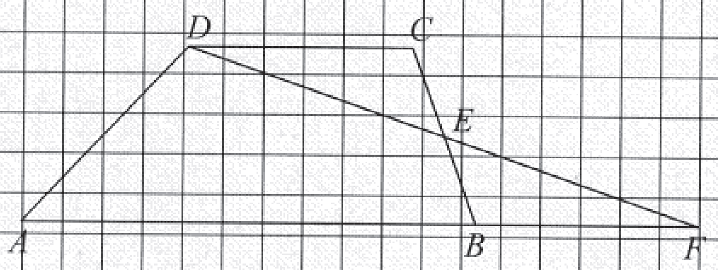
Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi utworzyć łańcuch argumentów i uzasadnić jego poprawność twierdzeniami, które nie występowały w zadaniu. Do rozwiązania zadania niezbędne były umiejętności:

– *rozpoznawanie kątów wierzchołkowych i naprzemianległych oraz korzystanie z ich własności,*
– *stosowanie cechy przystawania trójkątów (kbk),*
– *stosowanie pojęcia pola trapezu i trójkąta.*

Okazało się, że dla zdających było to najtrudniejsze zadanie w całym zestawie. Uczniowie nie wykazali się umiejętnością samodzielnego przeprowadzenia prostego rozumowania, składającego się z niewielkiej liczby kroków. Gimnazjaliści mieli kłopoty z formułowaniem argumentów i wyciąganiem wniosków oraz trudności w zapisywaniu toku swojego rozumowania. Z zapisu wielu prawdziwych dla tego zadania faktów, nie potrafili podać konkluzji. Analiza rozwiązań wykazała znaczne problemy w stosowaniu właściwego języka matematycznego. Zdecydowana większość rozwiązujących to zadanie stwierdzała równość pól trójkątów: ΔBFE i ΔCDE, ale nie potrafili tej równości wykazać. Nagminnie wykorzystywano tezę jako założenie, tzn. z równości pól trapezu i trójkąta, wykonując przekształcenia algebraiczne wzorów na pola otrzymywali równość: podstawy trójkąta i sumy podstaw trapezu. Gimnazjaliści mylili własności przystawania i podobieństwa - korzystali z cechy kkk podobieństwa trójkątów.
Przedstawione rozwiązania uczniowskie pokazują słabe i mocne strony rozumowania gimnazjalistów.

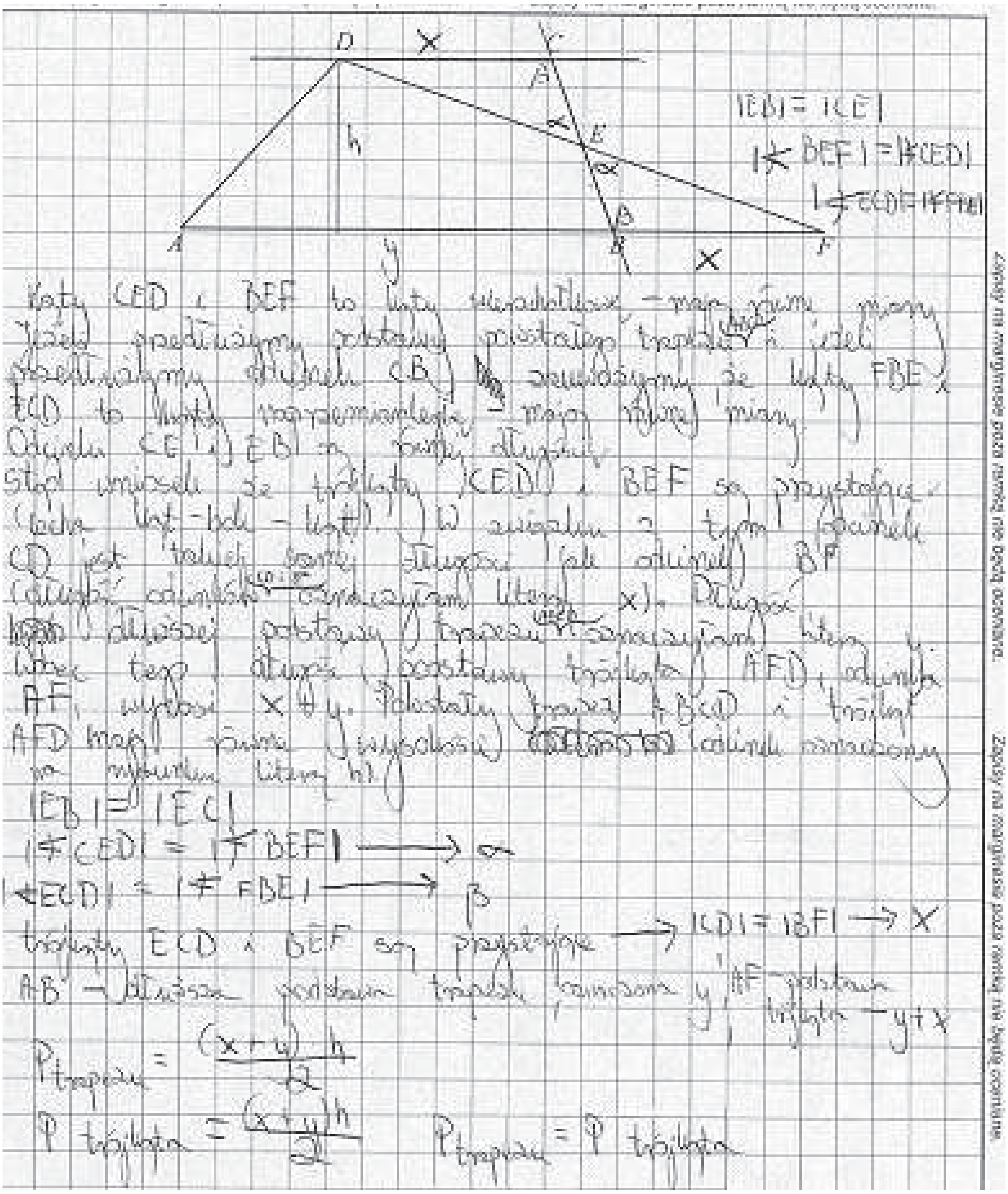
Rozwiązania uczniowskie
Przedstawione rozwiązania uczniowskie pokazują słabe i mocne strony rozumowania gimnazjalistów.

Odpowiedzi poprawne
Przykład 1.
W swoich pracach gimnazjaliści zaprezentowali rozwiązania wzorcowe z wyraźnie wyodrębnionym założeniem oraz tezą. W uzasadnieniu przedstawiono zwięzły komentarz świadczący o pełnym zrozumieniu problemu. Natomiast poprawne operowanie językiem przedmiotu i symbolami matematycznymi utwierdzają w przekonaniu, że rozwiązanie wykonał wprawny matematyk.



Z.: BC - ramię trapezu
$\frac{1}{2}|BC| = |BE|$ i $\frac{1}{2}|BC| = |EC|$
T.: $P_{\triangleleft ABCD} = P_{\triangle AFD}$
Dowód.
z zał. $|BE| = |EC|$
$|\sphericalangle BEF| = |\sphericalangle CED|$ → kąty wierzchołkowe
$|\sphericalangle EBF| = |\sphericalangle ECD|$ → kąty naprzemianległe
$\triangle BFE \equiv \triangle CDE$ → cecha przystawania kbk
Czworokąt ABED jest częścią wspólną trapezu ABCD oraz trójkąta AFD, więc wykazując równość pól trójkątów BFE i CDE wykazałem równość pól $\triangleleft ABCD$ i $\triangle AFD$.

Przykład 2.
Rozwiązanie bezbłędne, opisane bardzo dokładnie – najpierw wyprowadzono wniosek o równości miar odpowiednich kątów i boków, następnie uzasadniono przystawanie odpowiednich trójkątów, aby algebraicznie zapisać równość pól trapezu *ABCD* i trójkąta *AFD*.



Kąty CED i BEF to kąty wierzchołkowe – mają równe miary. Jeżeli przedłużymy podstawy powstałego trapezu i jeżeli przedłużymy odcinek CB, zauważymy że kąty FBE i ECD to kąty naprzemianległe – mają równe miary. Odcinki CE i EB są równej długości. Stąd wniosek że trójkąty CED i BEF są przystające (cecha kąt-bok-kąt). W związku z tym odcinek CD jest takiej samej długości jak odcinek BF (długość odcinków oznaczyłam literą x). Długość dłuższej podstawy trapezu oznaczyłam literą y. Wobec tego długość podstawy trójkąta AFD, odcinka AF, wynosi x + y. Pola trapezu ABCD i trójkąta AFD mają równe wysokości (odcinek oznaczony na rysunku literą h).

|EB| = |EC|

$|\sphericalangle CED| = |\sphericalangle BEF| \longrightarrow \alpha$

$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle FBE| \longrightarrow \beta$

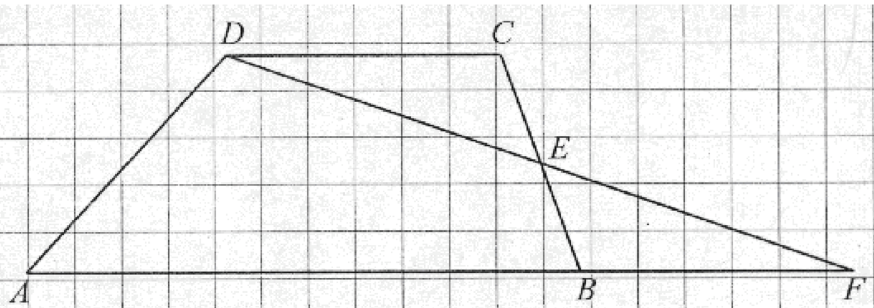
trójkąty ECD i BEF są przystające $\longrightarrow |CD| = |BF| \longrightarrow x$

AB – dłuższa podstawa trapezu oznaczona y, AF podstawa trójkąta – y + x

$P_{trapezu} = \frac{(x+y)\cdot h}{2}$

$P_{trójkąta} = \frac{(x+y)h}{2}$ $\quad P_{trapezu} = P_{trójkąta}$

Przykład 3.
Rozwiązanie poprawne, eleganckie, z pełnym uzasadnieniem.



$$\left.\begin{aligned} P_{tr_{ABCD}} &= \tfrac{1}{2}\cdot(|CD|+|AB|)\cdot h \\ P_{\Delta ADF} &= \tfrac{1}{2}\cdot(|BF|+|AB|)\cdot h \end{aligned}\right\}$$ wysokości w tych figurach są równe

$|AB| + |BF| = |AB| + |CD|$?

Trójkąty ΔCED i ΔBEF są trójkątami przystającymi, bo:

$|BE| = |CE| = \frac{1}{2}\cdot|CB|$

$\sphericalangle BEF$ i $\sphericalangle DEC$ mają taką samą miarę, bo są to kąty wierzchołkowe.
$\sphericalangle EBF$ i $\sphericalangle DCE$ mają taką samą miarę, bo są to kąty naprzemianległe

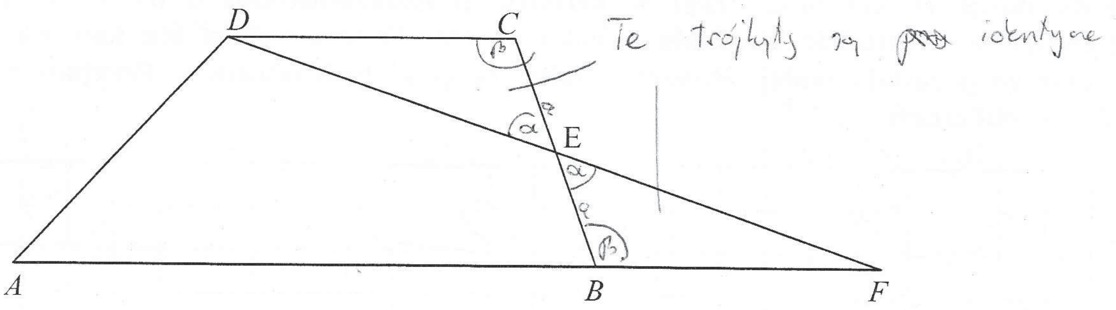
Dzięki własności trójkątów przystających można stwierdzić, że: $|CD| = |BF|$, czyli

$\frac{1}{2}\cdot(|CD| + |AB|)\cdot h = \frac{1}{2}(|BF| + |AB|)\cdot h$

Wniosek: Pole trójkąta ΔADF jest równe polu trapezu ABCD.

Przykład 4.

Strategia tego rozwiązania polegała na zauważeniu, że trapez i *ABCD* i trójkąt *AFD* mają takie same wysokości. Najpierw jednak uzasadniono przystawanie trójkątów *BFE* i *CDE*, aby następnie po wykonaniu przekształceń algebraicznych w logiczny sposób wyprowadzić poprawny wniosek.



$P_{\Box} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

$P_{\triangle} = \frac{1}{2}\, a \cdot h$

$P_{\Box} = \frac{1}{2}(AB + DC)\cdot h$

$P_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot h$

$h = \frac{P_{\Box}}{(AB + DC)} \cdot 2$

$h = \frac{P_{\triangle}}{AF} \cdot 2$

Trójkąty ΔDCE i ΔEBF są przystające ponieważ mają 2 takie same kąty i identyczny bok (zasada ~~kąt~~ kąt, bok, kąt)

$\frac{P_{\Box}}{AB + DC} \cdot 2 = \frac{P_{\triangle}}{AF} \cdot 2$

$P_{\Box} \cdot AF = P_{\triangle} \cdot (AB + DC)$

Skoro trójkąty ΔDCE i EBF są ~~ident~~ przystające to boki DC jest takiej samej długości co BF

$AB + DC = AF$

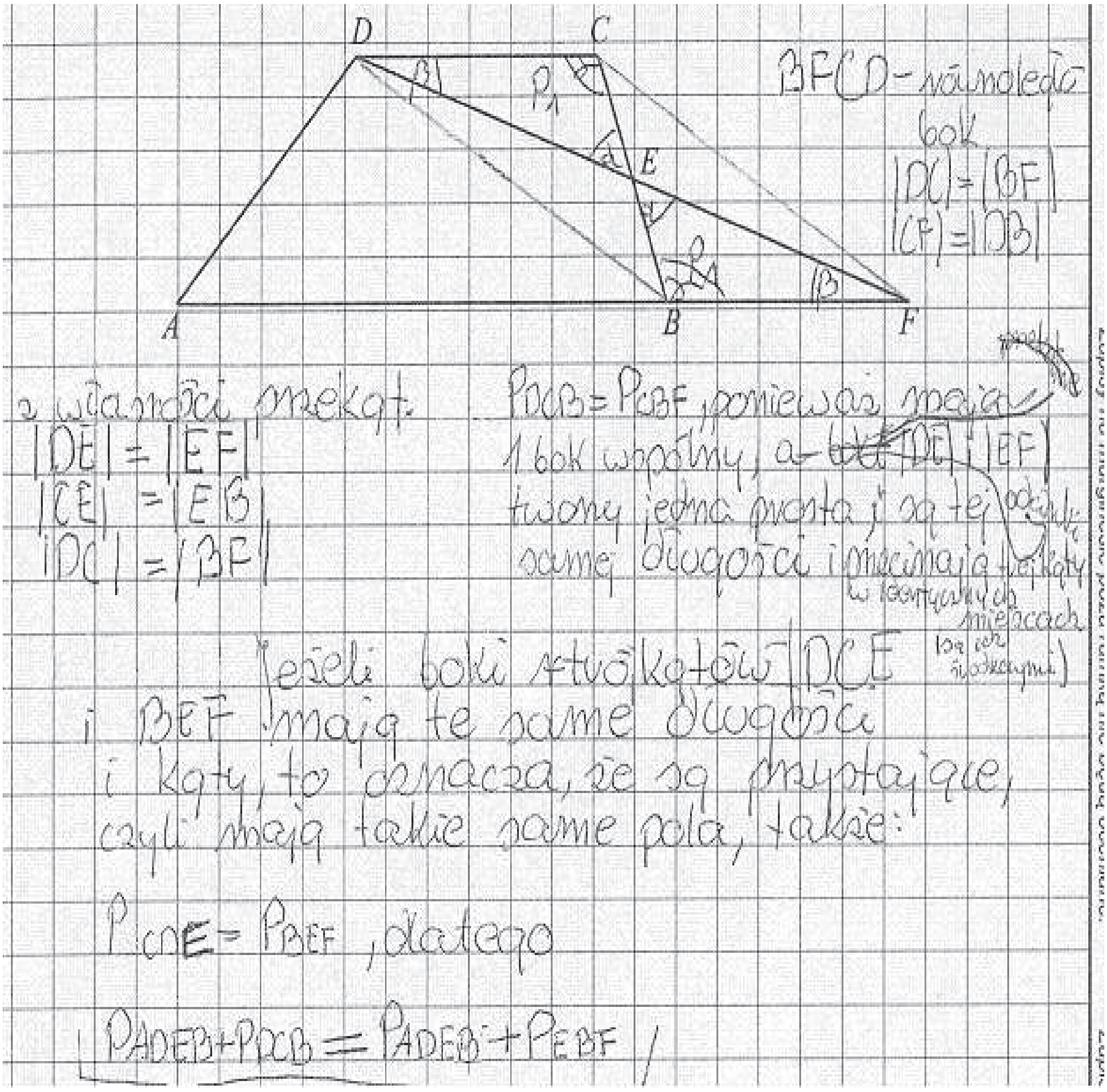
~~$P_{\Box} \cdot AF =$~~

$P_{\Box} \cdot AF = P_{\triangle} \cdot (AB + DC)$

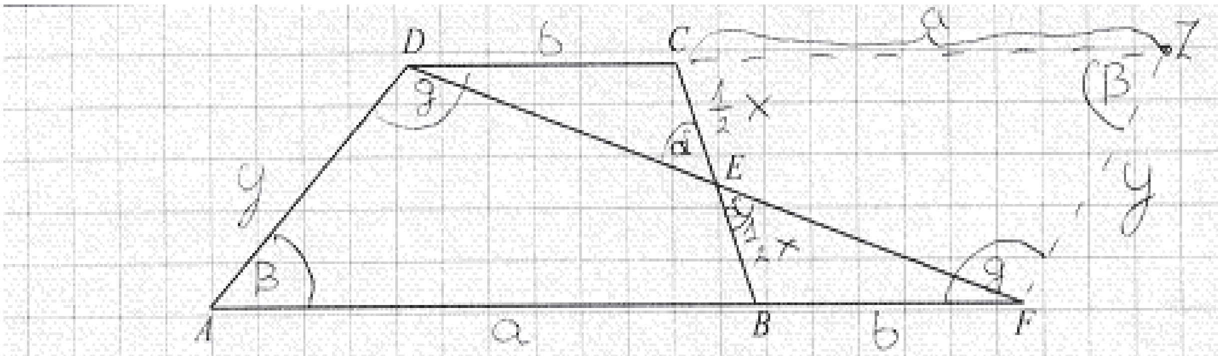
$P_{\Box} \cdot AF = P_{\triangle} \cdot AF \quad / : AF$

$P_{\Box} = P_{\triangle}$

Przykład 5.
Inny sposób uzasadnienia, w którym wykorzystano własności przekątnych w dorysowanym równoległoboku, a kąty wierzchołkowe i naprzemianległe poprawnie oznaczono na rysunku. Opis słowny pozwala dostrzec właściwą linię rozumowania, chociaż zapis po prawej stronie kartki świadczy o pewnej nieporadności w posługiwaniu się językiem matematycznym.



Przykład 6.
Kolejny przykład wykorzystania własności boków równoległoboku (dorysowanego w inny sposób niż w poprzednim przykładzie), aby wykazać równość pól wskazanych wielokątów. Uzasadnienie opracowane wyczerpująco z wykorzystaniem rysunku, autor poprawnie używa symboli i oznaczeń oraz zapisuje niezbędne wyjaśnienia.



Z równoległoboku AF = DZ
a + BF = b + CZ
a + b = b + a

Pole trójkąta AFD ~~jest~~ stanowi połowę równoległoboku AFZD.

$P_{AFD} = \frac{1}{2} P_{AFZD}$

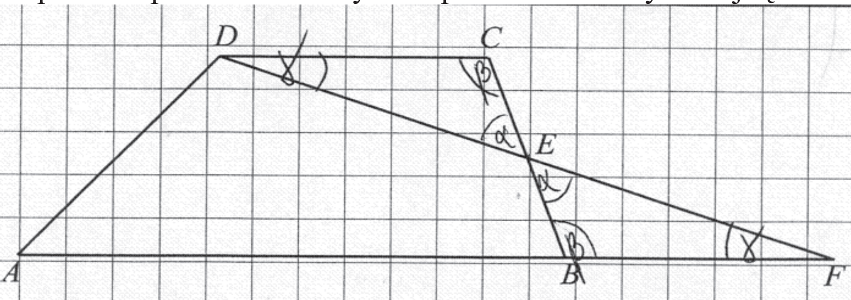
Pole trapezu ABCD stanowi połowę pola równoległoboku AFZD

$P_{ABCD} = \frac{1}{2} P_{AFZD}$

Zatem pole trójkąta AFD oraz trapezu ABCD stanowią $\frac{1}{2}$ równoległoboku ~~ABF~~ AFZD co udowadnia, że ich pola są równe.

<u>Odpowiedzi częściowo poprawne</u>
Często spotykane rozwiązania to takie, w których uzasadniano równość pól trójkątów w oparciu o stwierdzenie ich przystawania, które należało w tym zadaniu wykazać.

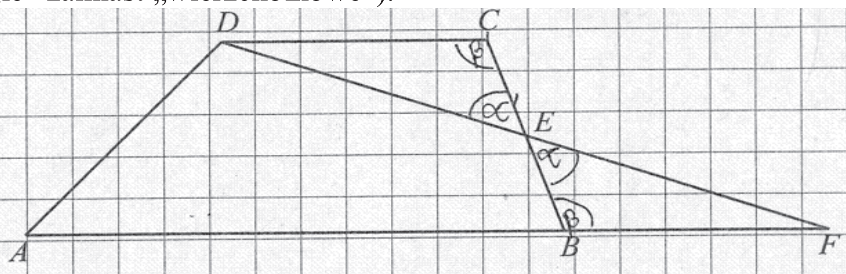
Przykład 7.
W poniższym przykładzie uczeń stwierdza (nie dowodzi) równość miar odpowiednich katów w trójkątach, a to przecież pozwala orzec tylko o podobieństwie tych trójkątów.



Odp.: Pole trapezu ABCD ~~jest~~ i pole trójkąta AFD są takie same ponieważ ~~część~~ czworokąt ABED jest wspólny, a trójkąty CDE i BEF są trójkątami przystającymi.

∢DEC jest równy ∢BEF
∢BFE jest równy ∢CDE
∢EBF jest równy ∢ECD

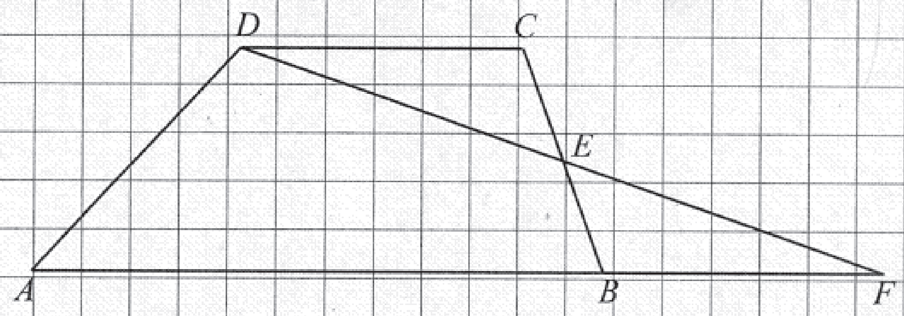
Przykład 8.
Również w tym rozwiązaniu stwierdzono tylko równość miar kątów i boków (bez uzasadnienia) oraz wykazano się nieznajomością nazw kątów (użyto określenia „kąty naprzeciwległe” zamiast „wierzchołkowe”).



Trapez ABCD i trójkąt AFD mają takie same pola ponieważ ∢BEF i ∢CED są takiej samej miary. Są to ∢ naprzeciwległe, odcinki |CE| i |BE| oraz |DE| i |EF| są równej długości. Kąty te jaki i odcinki tworzą dwa trójkąty przystające o takich samych polach. Dlatego gdy (~~[illegible]~~) (~~[illegible]~~) odwracamy trójkąt BEF wokół punktu E, to punkt F nałoży się na punkt D, a punkt B na punt C i powstanie trapez tej samej wielkości co trapez ABCD.

Przykład 9.

Kolejne dwa przykłady potwierdzają, że uczniowie zauważali cześć wspólną (czworokąt *ABED*), stwierdzali przystawanie trójkątów *BFE* i *CDE,* aby poprawnie wnioskować o równości pól trapezu *ABCD i* trójkąta *AFD.* Potwierdzają również, że najtrudniej wykazywać oczywistość; tutaj przystawanie trójkątów rozwiązujący przyjęli jako pewnik.



Jeżeli do czworokąta ABED dodamy pole trójkąta ECD otrzymamy pole trapezu.

Trójkąt BEF jest taki sam jak trójkąt CED, wiemy to ponieważ te trójkąty mają wspólnę ~~kąt~~ 2 kąty.

Jeżeli do czworokąta ~~BBE~~ ABED dodamy pole trójkąta BEF to otrzymamy pole trójkąta ~~ABFD~~ AFD.

Z tego wynika że pole trapezu ABCD i pole trójkąta AFD są równe.

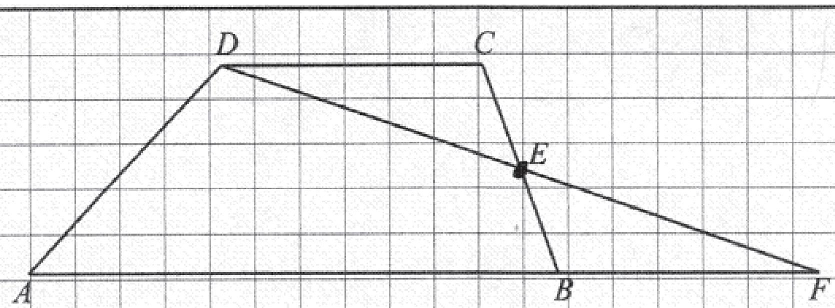
Przykład 10.

△DCE jest taki sam jak △BEF
każda z figur składa się z pola ADEB
i każda ma dodatkowy trójkąt DCE
lub BEF, dlatego pole trapezu
ABCD i trójkąt AFD są równe.

<u>Odpowiedzi błędne</u>

Pewna część zdających nie miała świadomości, że w swoim uzasadnianiu źle rozumują. Świadczą o tym udzielane odpowiedzi. Ponadto w wielu pracach występowało dużo opisów, z których nic nie wynikało.

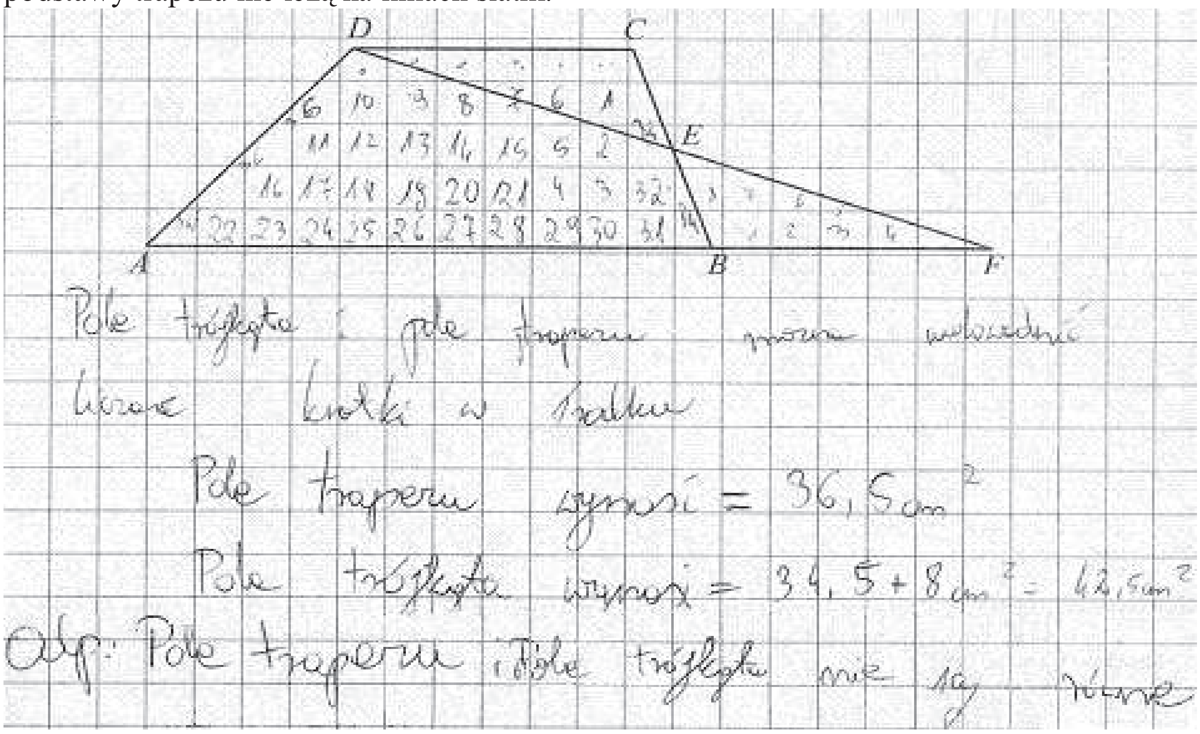
Przykład 11.
Zdarzały się wywody błędne merytorycznie – np. tu : „2 proste równoległe do siebie przecinają się pod katem prostym”. Uczennica jest pewna, że właściwie uzasadniła równość wskazanych pól, co zapisuje.



Uzasadnieniem tego, że pole trapezu ABCD i pole trójkąta AFD są równe było by to, że 2 proste równoległe do siebie, przecinają się w połowie pod kątem prostym, tworząc punkt przecięcia się prostych nazwanym punktem E. Pole trójkąta ADF jest takie same pod względem długości jak trapez ABCD. Tak, więc udowodniłam oraz wykazałam, że pole trapezu ABCD i pole trójkąta AFD jest równe.

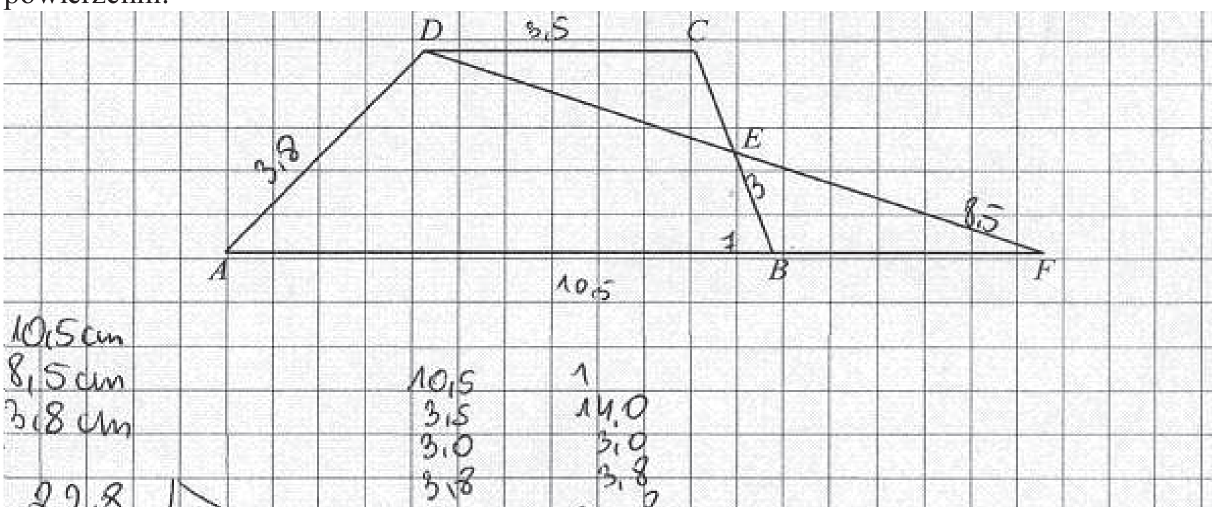
Przykład 12.

Metoda zliczania liczby kwadratów jednostkowych zawartych w polu figury jest dobra wtedy, gdy zdający potrafi ją stosować. W tym przykładzie gimnazjalista „nie zauważył", że podstawy trapezu nie leżą na liniach siatki.



Przykład 13.

Ten przykład pokazuje, że uczeń nie ma wykształconego ani pojęcia obwodu, ani pojęcia pola powierzchni.



Zadanie 23. (0-4)
Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 80 cm^2, a pole jego powierzchni całkowitej wynosi 144 cm^2. Oblicz długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Wymagania ogólne (z podstawy programowej)
IV. Użycie i tworzenie strategii.

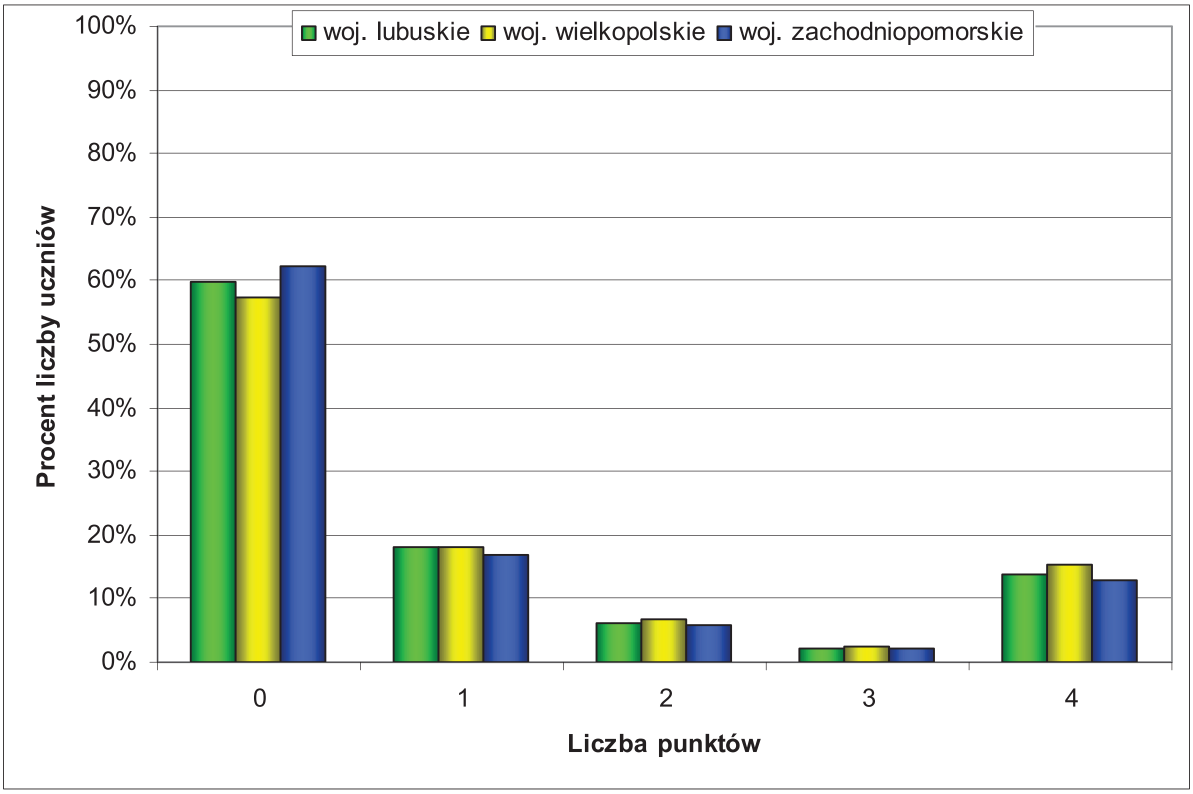
Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)
10. Figury płaskie. Uczeń:
9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Poziom wykonania zadania 23.
Maksymalną liczbę punktów (4 pkt) uzyskało ok. 14,5% gimnazjalistów w Okręgu.
Zero punktów otrzymało ponad 59% trzecioklasistów w Okręgu, z czego aż 21% nawet nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 23.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 4 pkt)	0,93 pkt	1,02 pkt	0,87 pkt
Średni wynik procentowy	23,4%	25,4%	21,8%
Współczynnik łatwości	0,23	0,25	0,22
Interpretacja współczynnika łatwości	Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.		

Zestawienie liczby uczniów, którzy otrzymali 4 lub 3 lub 2 lub 1 lub 0 punktów.

Liczba punktów	Procent liczby uczniów, którzy uzyskali określoną liczbę punktów w woj.:		
	lubuskim	wielkopolskim	zachodniopomorskim
4	13,93%	15,36%	12,86%
3	2,08%	2,46%	2,11%
2	6,25%	6,69%	5,72%
1	17,98%	18,19%	16,96%
0	59,76%	57,30%	62,35%
w tym BO	27%	19%	22%



Wykres 13. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 23.*

Komentarz

Zaplanowanie i zrealizowanie strategii rozwiązania problemu, wykorzystując przy tym zintegrowaną wiedzę, to ważna umiejętność w życiu każdego człowieka.

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zaplanować kolejność czynności, wynikających wprost z treści zadania, które nie mieszczą się w ramach rutynowego algorytmu, a następnie zrealizować ten swój plan. Rozwiązanie zadania polegało na obliczeniu długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zgodnie z warunkami podanymi w tekście.

Aby poprawnie rozwiązać zadanie, należało najpierw rozpoznać opisaną bryłę, następnie obliczyć długość: krawędzi podstawy, wysokości ściany bocznej i krawędzi bocznej ostrosłupa. Do rozwiązania zadania niezbędne były następujące wiadomości i umiejętności:

- *rozpoznawanie ostrosłupów prawidłowych,*
- *rozumienie pojęcia pola powierzchni: całkowitej, bocznej i podstawy,*
- *stosowanie sposobu obliczenia pola kwadratu oraz trójkąta,*
- *znajomość własności krawędzi ostrosłupa i wykorzystanie ich,*
- *stosowanie twierdzenia Pitagorasa.*

Zadanie, jakich wiele rozwiązuje się na lekcjach matematyki; tymczasem okazało się, że w każdym województwie około 60% gimnazjalistów za rozwiązanie zadania otrzymała zero punktów, przy czym co piąty uczeń w Okręgu po prostu opuścił to zadanie.

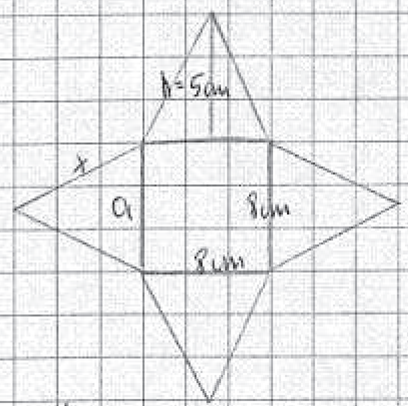
Rozwiązania uczniowskie

Poprawne rozwiązanie tego zadania wymagało wykonania trzech kroków (w odpowiedniej kolejności) polegających na wyznaczeniu długości: krawędzi podstawy, wysokości ściany bocznej oraz krawędzi bocznej. Rozwiązania mogły się różnić jedynie sposobami obliczeń.

Odpowiedzi poprawne

Przykład 1.

Oto przykład wzorcowego rozwiązania, w którym wprawny matematyk opisał swój tok rozumowania. Rysunek i jego opis, posługiwanie się wzorami oraz rachunek jednostek świadczą o biegłości matematycznej rozwiązującego.



- siatka ostrosłupa prawidłowego czworokątnego

$P_b = 80\ cm^2$

$P_c = 144\ cm^2$

DŁUGOŚĆ KRAWĘDZI PODSTAWY

$P_c - P_b = P_p$

$144\ cm^2 - 80\ cm^2 = 64\ cm^2$

$P_p = a \cdot a$

$\sqrt{64} = 8$

$a = 8\ cm$

$P_p = 8cm \cdot 8cm = 64\ cm^2$

WYSOKOŚĆ ŚCIANY BOCZNEJ

$P_b = 80\ cm^2$

$80\ cm^2 : 4 = 20\ cm^2$

$20\ cm^2$ - pole jednej ściany bocznej.

$P = \frac{a \cdot h}{2}$

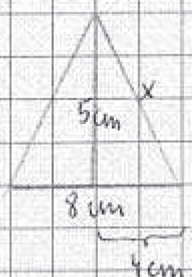
$20\ cm^2 = \frac{\cancel{8}^{4} \cdot h}{\cancel{2}_{1}}$

$20\ cm^2 = 4 \cdot h \quad | :4$

$5 = h$

$h = 5\ cm.$

KRAWĘDŹ BOCZNA



$5^2 + 4^2 = x^2$

$25 + 16 = x^2$

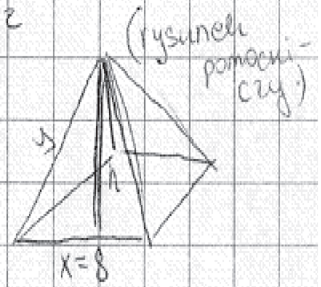
$41 = x^2$

$x = \sqrt{41}\ cm$

Odp. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy wynosi 8 cm, wysokość ściany bocznej 5 cm, a krawędź boczna jest równa $\sqrt{41}$ cm

Przykład 2.
Rozwiązanie bezbłędne, a przejrzyście zapisany plan rozwiązania pozwala prześledzić zastosowaną strategię.

Dane:
Pole powierzchni bocznej ostrosłupa: 80 cm²
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa: 144 cm²
Szukane:
x - długość krawędzi podstawy
y - długość krawędzi bocznej



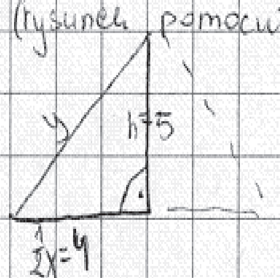
$x = \sqrt{144-80} = \sqrt{64} = 8$

wyliczanie y:
80 : 4 = 20 (w ostrosłupie istnieją 4 takie same ściany boczne)

$P_{trójkąta} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot h}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 4 \cdot h = 20 \quad 20 : 4 = h \quad h = 5$

h - wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

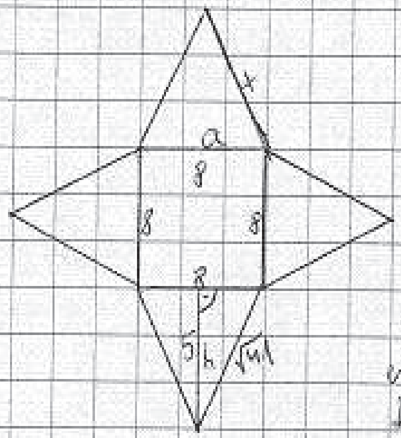
(rysunek pomocniczy)



$y^2 = 5^2 + 4^2$
$y^2 = 25 + 16$
$y^2 = 41$
$y = \sqrt{41}$

Odp. Długość krawędzi podstawy wynosi 8 cm, a długość krawędzi bocznej $\sqrt{41}$ cm.

Przykład 3.
Rozwiązanie bezbłędne, z dokładnymi wyjaśnieniami dotyczącymi bryły



$P_b = 80cm^2$

$P_c = 144cm^2$

$P_c = P_b + P_p$

$P_p = 144cm^2 - 80cm^2 = 64cm^2$

Jest to ostrosłup prawidłowy czworokątny czyli w podstawie ma czworokąt foremny, którym jest kwadrat.

$P_p = a^2$

$a^2 = 64cm^2 \;/\sqrt{\ }$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{64cm^2}$

$a = 8cm$ - długość krawędzi podstawy

$P_b = 4 \cdot P_s$ - pole boczne jest równe sumie pól czterech jednakowych trójkątów równoramiennych.

$P_b = 80cm^2$

$P_s = 80cm^2 : 4 = 20cm^2$

$P_s = \frac{a \cdot h}{2}$ $\quad P_s = 20cm^2$

$20 = \frac{a \cdot h}{2} \;/\cdot 2$

$40 = a \cdot h$

$40 = 8 \cdot h \;/:8$

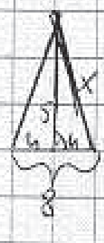
$40 : 8 = h$

$5 = h$

$h = 5$

$a = 8$ - długość krawędzi podstawy

$h = 5cm$ - wysokość ściany bocznej



$x^2 = 5^2 + 4^2$

$x^2 = 25 + 16$

$x^2 = 41 \;/\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{41}$

$x = \sqrt{41}$ - długość krawędzi bocznej

Odp. Długość krawędzi podstawy jest równa $8cm$, a długość krawędzi bocznej jest równa $\sqrt{41}\,cm$.

Przykład 4.
Zapewne ten rozwiązujący jest przyzwyczajony do rozwiązywania zadań na tablicy i opowiadania o tym, co robi. Wywód jest tak dokładny, że każdy czytający może nauczyć się rozwiązywać tego typu zadania.

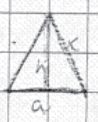
graniastosłup prawidłowy czworokątny $\rightarrow$ podstawą jest kwadrat
powierzchnia boczna składa się z 4 jednakowych trójkątów, których łączne pole wynosi $80\,cm^2$. Pole jednej ~~ś~~ ściany bocznej $= 80cm^2 : 4 = 20cm^2$. Pole powierzchni całkowitej wynosi $144cm^2$. Pole podstawy $\rightarrow$ pole całkowite $-$ pole boczne $= 144\,cm^2 - 80cm^2 = 64cm^2$. Podstawą jest kwadrat. Pole kwadratu liczymy ze wzoru $\rightarrow a^2$.

$a^2 = 64cm^2$
$a = 8cm$

a = długość krawędzi podstawy
Pole ściany bocznej liczymy ze wzoru $\rightarrow \frac{1}{2}\cdot a\cdot h$, gdzie $a = 8cm$.

$20cm^2 = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h$
$20cm^2 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot h$
$20cm^2 = 4h \quad /:4cm$
$5cm = h$

wysokość ściany bocznej wynosi 5 cm.



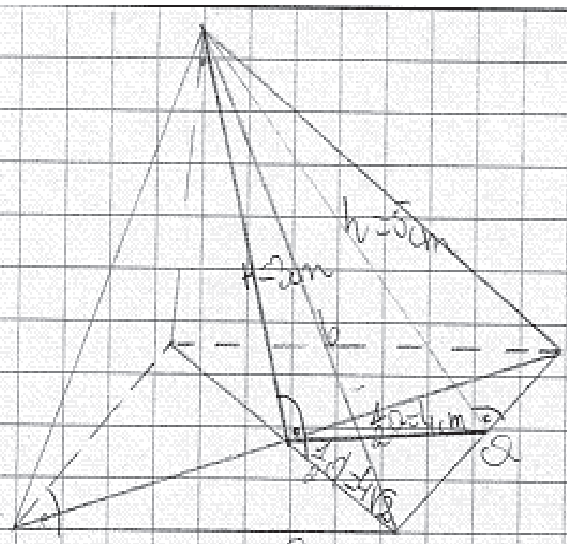
$x \rightarrow$ dł. krawędzi bocznej

Dł. krawędzi bocznej obliczymy, gdy ścianę boczną podzielimy na dwa trójkąty prostokątne o wysokości 5cm i podstawie 4cm. Dł. krawędzi bocznej obliczymy z twierdzenia Pitagorasa.

$a^2 + b^2 = x^2$
$4^2 + 5^2 = x^2$
$16 + 25 = x^2$
$41 = x^2$
$x = \sqrt{41}$

Odp: Długość krawędzi podstawy wynosi 8cm, długość krawędzi bocznej wynosi $\sqrt{41}$

Przykład 5.
Kolejne poprawne rozwiązanie, w którym gimnazjalista oblicza długość krawędzi bocznej w oparciu o wysokość ostrosłupa. Rozwiązanie niepotrzebnie „wydłużone” o dwa kroki, chociaż właśnie te dwa kroki świadczą o bardzo dobrze wykształconej wyobraźni przestrzennej, gdyż uczeń operuje trójkątami zawierającymi się w przekrojach ostrosłupa wzdłuż wysokości ścian bocznych oraz wzdłuż krawędzi bocznych.



$P_c = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h + a^2 = 144\,cm^2$

$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h = 80\,cm^2$

$d = a\sqrt{2}$

$a = 8cm$

$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h = 80$

$a^2 = 144 - 80$

$16h = 80 \quad /:16$

$a = \sqrt{64} = 8cm$

$h = 5cm$

$80:16 = 5$

-80

$H^2 + 4^2 = 5^2$

$H^2 = 25 - 16$

$H = \sqrt{9} = 3cm$

$3^2 + (4\sqrt{2})^2 = b^2$

$9 + 32 = b^2$

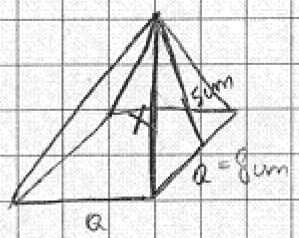
$b = \sqrt{41}\ cm$

Krawędź podstawy tego ostrosłupa wynosi 8 cm, a krawędź boczna $\sqrt{41}$ cm.

<u>Odpowiedzi częściowo poprawne</u>

Często uczniowie prawidłowo przeprowadzali tok rozumowania, ale popełniali proste błędy rachunkowe.

Przykład 6.
Zadanie rozwiązane poprawnie, z jednym błędem rachunkowym – w obliczeniu sumy liczb 25+16.



$P_b = 80 cm^2$

$P_c = 144 cm^2$

$P_p = P_c - P_b = 144 cm^2 - 80 cm^2 = 64 cm^2$

$P_p = a^2$ $\quad a^2 = 64$

$a = \sqrt{64}$

$a = 8 cm$

$P_b = 4\Delta = 80 cm^2$

$1\Delta = 20 cm^2$ $\qquad a^2 + b^2 = c^2$

$P_\Delta = \frac{a \cdot h}{2} = 20$ $\quad a = 8$ $\qquad 4^2 + 5^2 = x^2$

$\frac{{}^{4}\cancel{8} \cdot h}{\cancel{2}_{1}} = 20$ $\qquad 16 + 25 = x^2$

$4h = 20$ $\qquad x^2 = 39$

$h = 5 cm$ $\qquad x = \sqrt{39} cm$

Odp: Długość krawędzi podstawy wynosi 8cm, a długość krawędzi bocznej wynosi $\sqrt{39}$ cm.

Przykład 7.
Zadanie rozwiązane poprawnie, z jednym błędem rachunkowym – w obliczeniu kwadratu liczby pięć.

$P_c = P_p + P_b$

$P_p = a^2$

$144 = P_p + 80 \quad |-80$

$a = \sqrt{P_p}$

$P_p = 64$

$a = \sqrt{64} = 8cm$

~~$P_p = \sqrt{64} = 8$~~

P_b składa się z 4 ścian równej powierzchni, więc:

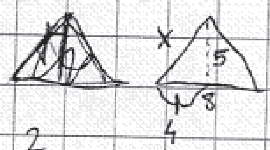
$80:4 = 20 cm^2$

$\frac{a \cdot h}{2} = 20$

$\frac{\cancel{8}^{4} \cdot h}{\cancel{2}_{1}} = 20$

$4 \cdot h = 20 \quad |:4$

$h = 5$



$4^2 + 5^2 = x^2$

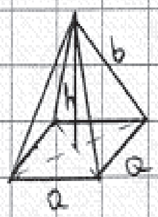
$16 + 20 = x^2$

$x^2 = 36 \quad |\sqrt{\ }$

$x = \sqrt{36} = 6$

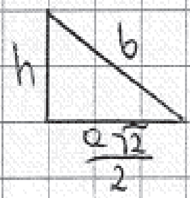
Odp: Krawędź podstawy wynosi 8cm a długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa wynosi 6 cm.

Przykład 8.
W niektórych rozwiązaniach uczniowie mylili wysokość ostrosłupa z wysokością ściany bocznej. Rozwiązujący prawidłowo wyznaczył długość krawędzi podstawy i wysokość ściany bocznej. Z zapisanego rozwiązania wynika, że uczeń znał strategię rozwiązania zadania. Niestety, pomylił wysokość ostrosłupa z wysokością ściany i stąd niepoprawny wynik.



$P_b = 80 cm^2$

$P_c = 144 cm^2$



$P_c = P_p + P_b$

$P_p = a^2$

$144 = a^2 + 80$

$a^2 + 80 = 144$

$a^2 = 144 - 80$

$a^2 = 64$

$a = \sqrt{64}$

$a = 8$ cm

$P_b = \cancel{4}^{2} \cdot \frac{a h}{\cancel{2}_1}$

$80 = 2 \cdot 8 \cdot h$

$80 = 16h$

$16h = 80 \quad |:16$

$h = 5$ cm

$h = 5$ cm

$b = ?$

$a = 8$ cm

$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{8}^{4}\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = 4\sqrt{2}$ cm

$5^2 + (4\sqrt{2})^2 = b^2$

$25 + 32 = b^2$

$b^2 = 57$

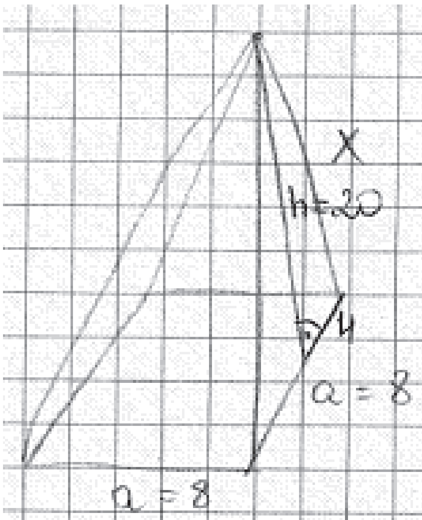
$b = \sqrt{57}$ cm

Odp: dł. krawędzi podstawy $- a = 8$ cm

dł. krawędzi bocznej ostrosłupa $- b = \sqrt{57}$ cm

Przykład 9.

Często uczniowie prawidłowo przeprowadzali tok rozumowania, ale tak jak w poniższym przykładzie, mimo poprawnego rysunku „zapominali”, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa to pole powierzchni czterech trójkątów, a nie jednego.



$Pb = 80 cm^2$
$Pc = 144 cm^2$

$Pp = 144 - 80 = 64 cm^2$

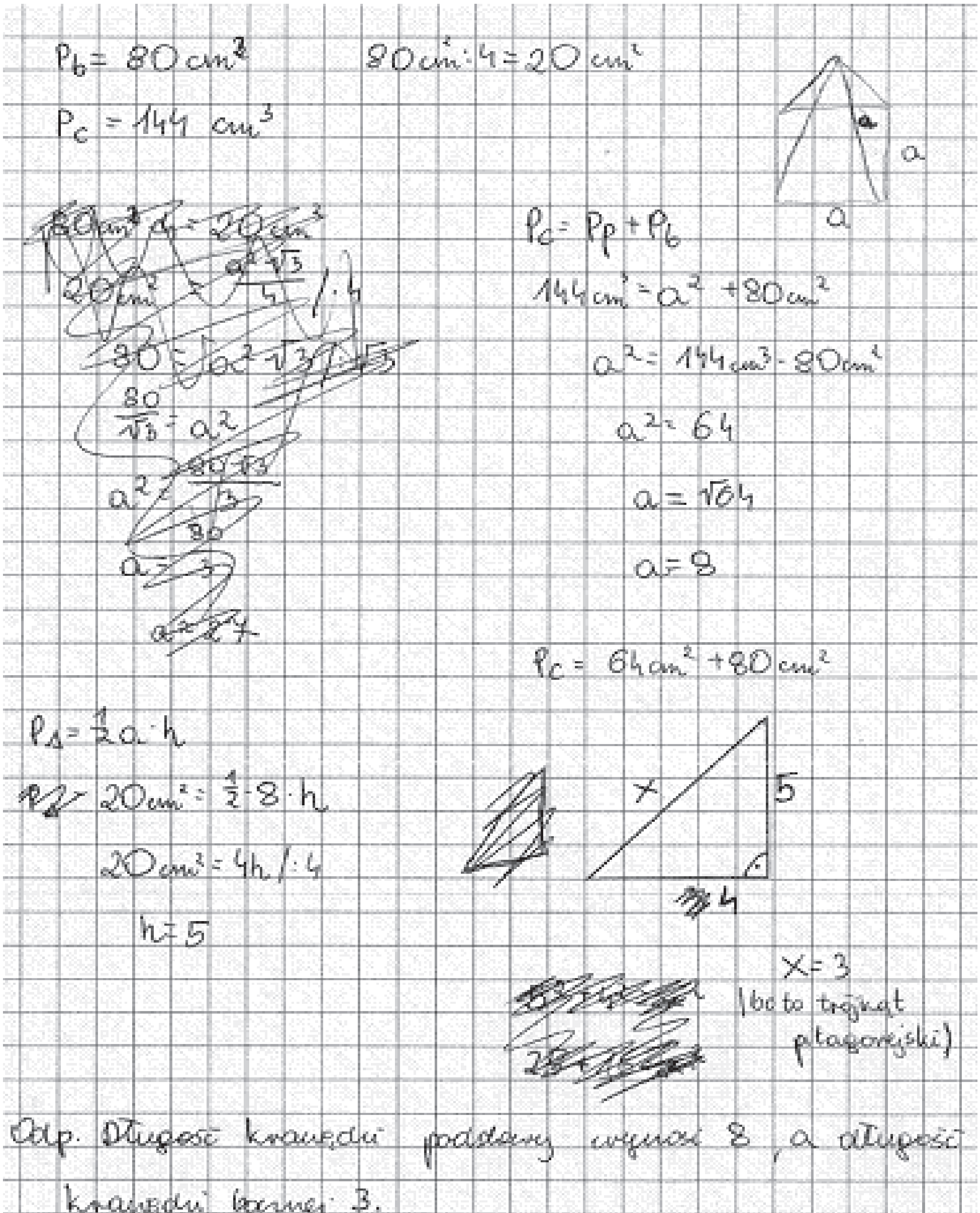
$64 = a^2$
$a^2 = \sqrt{64}$
$a = 8$

$Pb = 80 cm^2$
$80 = \frac{a \cdot h}{2}$
$80 = \frac{{}^{4}\cancel{8} \cdot h}{\cancel{2}_{1}}$
$80 = 4h \quad |:4$
$h = 20$

$20^2 + 4^2 = x^2$
$400 + 16 = x^2$
$x^2 = 416$
$x = \sqrt{416} = 20\sqrt{16} \approx 20{,}4$

Odp: Krawędź podstawy wynosi 8cm, a krawędź boczna $20\sqrt{16}$ cm.

Przykład 10.
Obrana strategia rozwiązania jest poprawna Skreślenia w pracy świadczą o tym, że uczeń potrafi dokonać autokorekty – wycofał się z pomysłu, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Uczeń nieuważny, sprawny w obliczeniach, ponieważ zna długości boków w trójkącie egipskim (3, 4, 5), ale „nie zauważył”, że 5 musi być wymiarem przeciwprostokątnej, a może nie potrafi stosować twierdzenia Pitagorasa?


$P_b = 80\,cm^2$ $\quad 80\,cm^2 : 4 = 20\,cm^2$

$P_c = 144\,cm^3$

$P_c = P_p + P_b$

$144\,cm^2 = a^2 + 80\,cm^2$

$a^2 = 144\,cm^3 - 80\,cm^2$

$a^2 = 64$

$a = \sqrt{64}$

$a = 8$

$P_c = 64\,cm^2 + 80\,cm^2$

$P_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h$

$20\,cm^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h$

$20\,cm^2 = 4h \;/:4$

$h = 5$

$x = 3$
(bo to trójkąt pitagorejski)

Odp. Długość krawędzi podstawy wynosi 8, a długość krawędzi bocznej 3.

Przykład 11.
Holistycznie patrząc na to rozwiązanie można stwierdzić, że przedstawiona strategia jest właściwa, oparta na trzech krokach. Niestety, w wielu rozwiązaniach pojawiał się ten sam błąd merytoryczny, a mianowicie uczniowie zakładali, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi. Wynikało to zapewne z niepoprawnego rozumienia pojęcia *ostrosłup prawidłowy*.

$Pb = 80\ cm^2$

$Pc = 144\ cm^2$

$Pc = Pp + Pb$

$144 = Pp + 80$

$144 - 80 = Pp$

$Pp = 64\ cm^2$

$Pp = a^2$

$64 = a^2 \ /\sqrt{\ }$

$a = 8\ cm$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{8\sqrt{3}}{2}$

$h = 4\sqrt{3}\ cm$

$h^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = x^2$

$(4\sqrt{3})^2 + 4^2 = x^2$

$16 \cdot 3 + 16 = x^2$

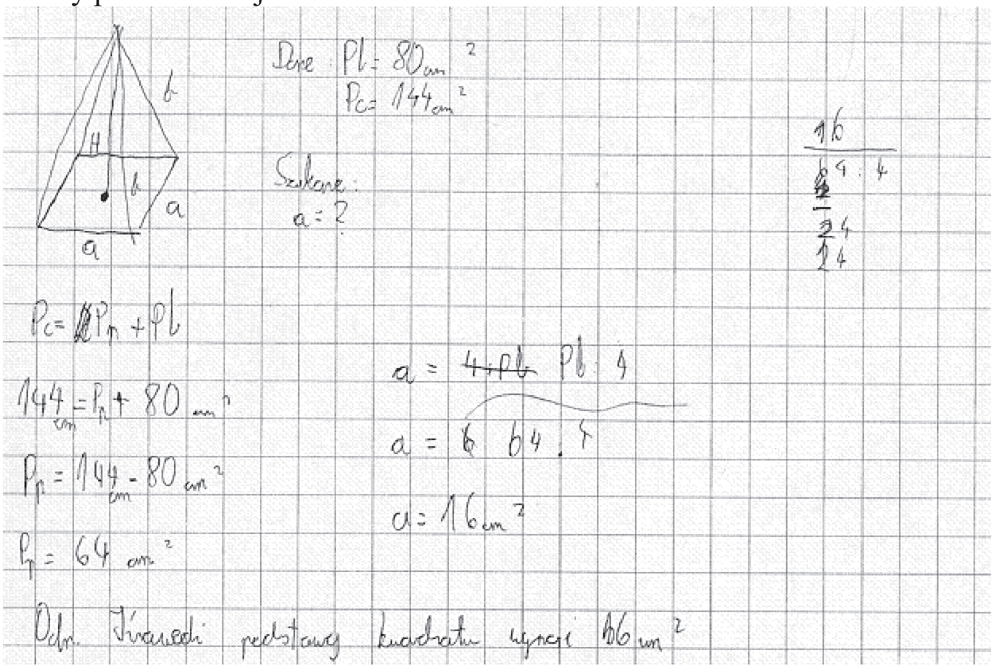
$48 + 16 = x^2$

$54 = x^2 \ /\sqrt{\ }$

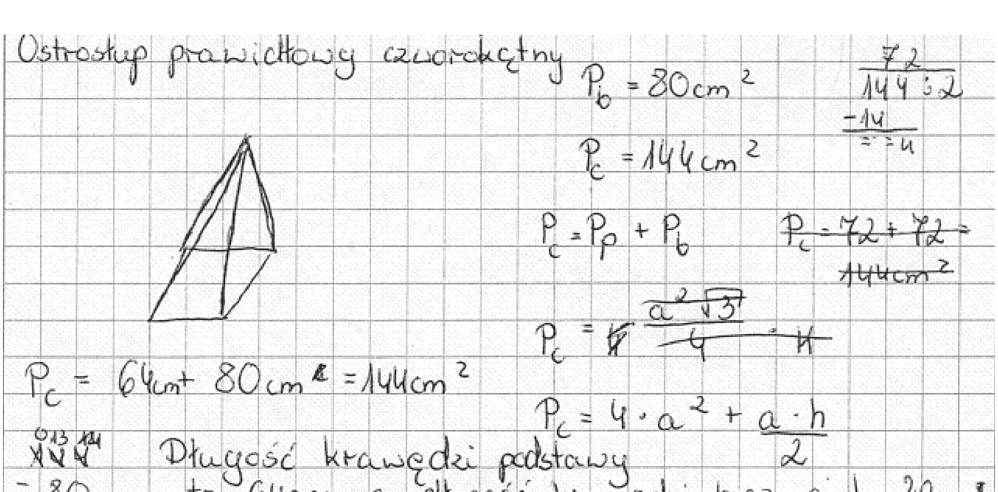
$x = 3\sqrt{6}\ cm$

<u>Odpowiedzi błędne</u>

Przykład 12.
Autor rozwiązania pokazał, że zna pojęcie ostrosłupa czworokątnego prawidłowego oraz wie, co to jest pole powierzchni całkowitej tej bryły. Niestety, nie potrafił z poprawnie obliczonego pola kwadratu wyznaczyć długość jego boku, a jest to umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.



Przykład 13.
Rozwiązujący rysunkiem potwierdził, że zna kształt ostrosłupa czworokątnego prawidłowego. Niestety, uczeń nie ma wykształconego ani pojęcia pola, ani pojęcia długości. Jego odpowiedź świadczy, że nie zna zasad konstrukcji trójkąta, ponieważ określa, że jeden bok trójkąta ma wymiar 64 cm, a dwa pozostałe po 20 cm. Ponadto błędny rachunek jednostek.



Przykład 14.
Ten szesnastolatek niczego nie wyniósł z kursu matematyki.

~~$P_p \cdot H$~~ $P_p \cdot P_c = H$

dane = $P_p = 80\ cm^2$

$P_c = 144\ cm^2$

szukane = $H = ?$

$80cm^2 \cdot 144cm^2 = 1152$

Odp: długość krawędzi podstawy wynosi 1152 cm^2 a długość krawędzi bocznej wynosi 983(8) cm^2

~~$P_p \cdot P_c = H \ /: P_c$~~ ~~$P_b \cdot P_c = H$~~

~~$\frac{P_p}{P_c} = H$~~ ~~dane $P_c = 1$~~

~~$H = \frac{80cm^2}{144cm^2} =$~~

$P_b : P_c = H$

dane: $P_c = 144\ cm^2$

$P_b = 1152\ cm^2$

szukane: $H = ?$

rozwiązanie:

$1152\ cm^2 : 144\ cm^2 = 983(8)\ cm^2$

Przypominamy, że szczegółowe dane statystyczne dotyczące wszystkich wyników egzaminu gimnazjalnego 2013 zostały podane w I i II raporcie oraz na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.