

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017**

**FORMUŁA DO 2014  
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**MAJ 2017**

## Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

### Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgę o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	A	B

### Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		C	D
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki, w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych (1.a).		

### Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		A	D
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).		

### Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		A	B
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).		

### Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		C	D
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).		

### Zadanie 6. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		D	C
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający oblicza wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej (2.e).		

**Zadanie 7. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.e).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 8. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>A</b>

**Zadanie 9. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych (1.a)	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 10. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej (4.i).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>A</b>

**Zadanie 11. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym (4.n).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 12. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 13. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

**Zadanie 14. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (6.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 15. (0–1)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 16. (0–1)**

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>A</b>

**Zadanie 17. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>C</b>	<b>D</b>

**Zadanie 18. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 19. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątność prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 20. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległości punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej (8.e).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>C</b>

**Zadanie 21. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach (9.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>A</b>	<b>B</b>

**Zadanie 22. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

**Zadanie 23. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji..	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych (9.b).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>A</b>

**Zadanie 24. (0–1)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>D</b>	<b>B</b>

**Zadanie 25. (0–1)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	<b>Wersja I</b>	<b>Wersja II</b>
		<b>B</b>	<b>C</b>

## Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

### Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap rozwiązania** polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego  $8x^2 - 72x$ .

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $8x^2 - 72x$ :

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 9$  lub zaznaczając pierwiastki trójmianu na wykresie

albo

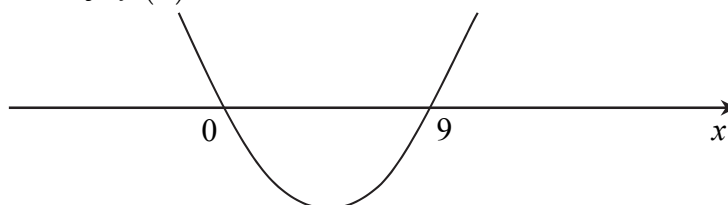
- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:

$$\Delta = 72^2, \quad x_1 = \frac{72 - 72}{16} = 0, \quad x_2 = \frac{72 + 72}{16} = 9.$$

**Drugi etap rozwiązania** polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności  $8x^2 - 72x \leq 0$ .

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $0 \leq x \leq 9$  lub  $\langle 0, 9 \rangle$  lub  $x \in \langle 0, 9 \rangle$  np. odczytując go

ze szkicu wykresu funkcji  $f(x) = 8x^2 - 72x$ .



### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 9$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 8x^2 - 72x$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd

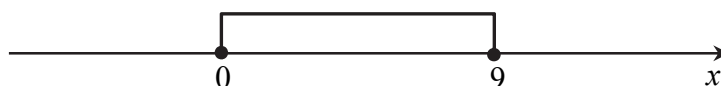
rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $0 \leq x \leq 9$  lub  $\langle 0, 9 \rangle$  lub  $x \in \langle 0, 9 \rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



### Uwagi

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x$ , bez podania stosownych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający wyznacza ujemną deltę trójmianu kwadratowego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

### Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu  $x_1 = 0$  i  $x_2 = 9$  i zapisze, np.  $x \in \langle -9, 0 \rangle$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $x \in \langle 9, 0 \rangle$ , to przyznajemy **2 punkty**.

**Zadanie 27. (0–2)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).
--------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Wylączamy wspólny czynnik przed nawias  $4^{2017}(1+4+4^2+4^3)$ . Doprowadzamy liczbę do postaci  $4^{2017} \cdot 5 \cdot 17$ . Wniosujemy, że dana liczba jest podzielna przez 17.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
 gdy zapisze liczbę  $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$  w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą  $4^k$ , gdzie  $1985 \leq k \leq 2017$ , np.  $4^{2017}(1+4+4^2+4^3)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

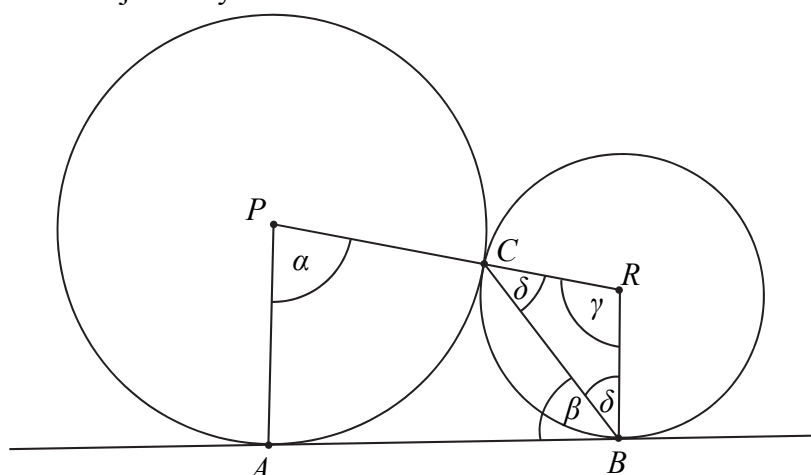
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
 gdy przeprowadzi poprawny dowód.

**Zadanie 28. (0–2)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Prosta  $AB$  jest styczna w punkcie  $B$  do okręgu o środku  $R$ , więc  $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$ . Stąd

$$\delta = |\sphericalangle CBR| = 90^\circ - \beta.$$



Trójkąt  $BRC$  jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta.$$

Zatem

$$|\sphericalangle BRC| = \gamma = 180^\circ - 2(90^\circ - \beta) = 2\beta.$$

Suma miar kątów czworokąta  $ABRP$  jest równa  $360^\circ$ ,  $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$ , więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BRP| + |\sphericalangle RPA| = 360^\circ,$$

czyli

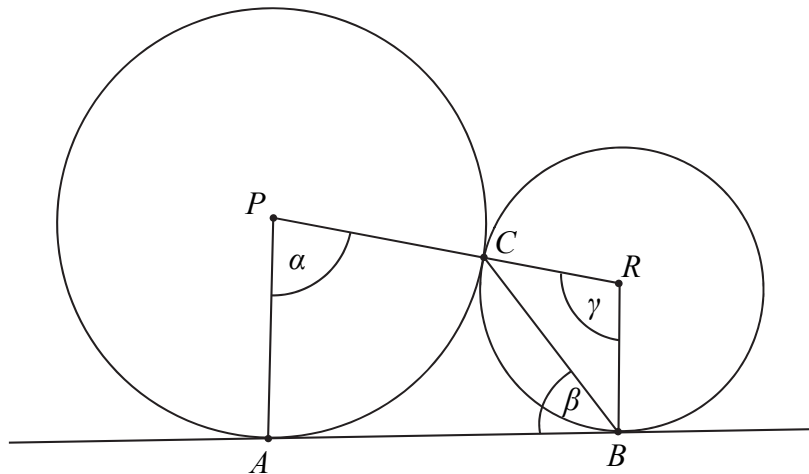
$$90^\circ + 90^\circ + 2\beta + \alpha = 360^\circ,$$

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

## II sposób



Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że  $|\sphericalangle BRC| = \gamma = 2\beta$ .

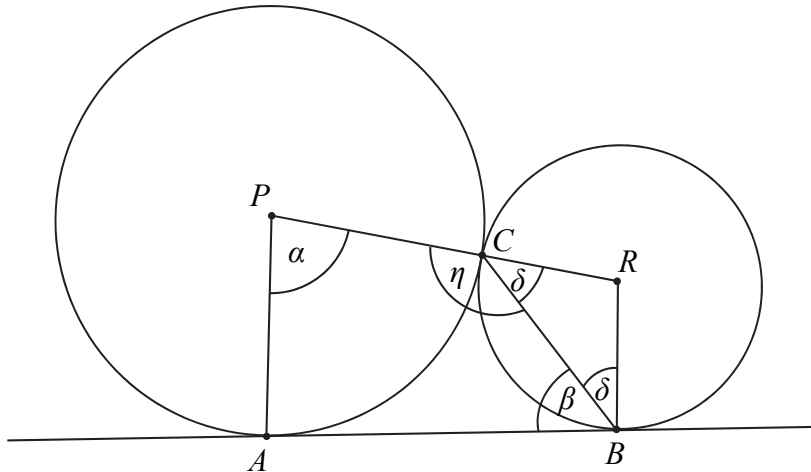
Ponieważ  $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$  i  $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$ , więc czworokąt  $ABRP$  jest trapezem o podstawach  $AP$  i  $BR$ . Suma miar kątów przy ramieniu trapezu jest równa  $180^\circ$ , więc

$$\alpha + \gamma = 180^\circ,$$

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

Stąd  $\alpha = 180^\circ - 2\beta$ . To kończy dowód.

### III sposób



Prosta  $AB$  jest styczna w punkcie  $B$  do okręgu o środku  $R$ , więc  $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$ . Stąd

$$\delta = 90^\circ - \beta.$$

Trójkąt  $BRC$  jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta.$$

Kąty  $BCR$  i  $PCB$  są przyległe, więc

$$\eta = 180^\circ - |\sphericalangle BCR| = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta.$$

Suma miar kątów czworokąta  $ABCP$  jest równa  $360^\circ$ ,  $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$ , więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle CPA| = 360^\circ,$$

czyli

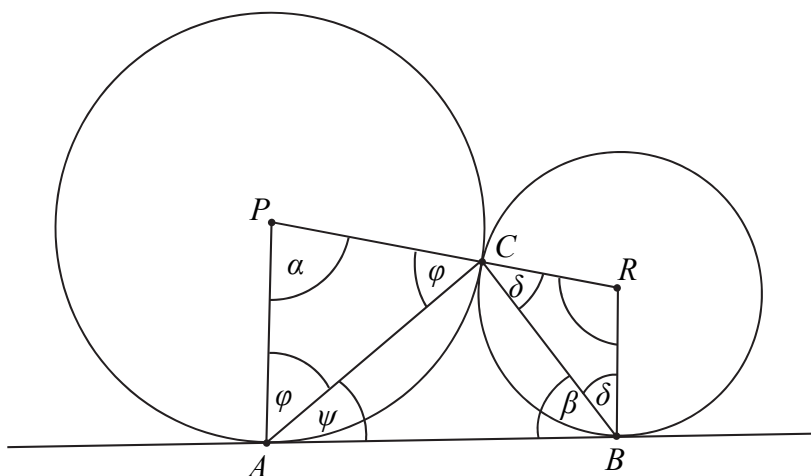
$$90^\circ + \beta + \eta + \alpha = 360^\circ,$$

$$90^\circ + \beta + (90^\circ + \beta) + \alpha = 360^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

### IV sposób



Prosta  $AB$  jest styczna w punkcie  $B$  do okręgu o środku  $R$ , więc  $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$ .

Stąd  $\delta = 90^\circ - \beta$ .

Trójkąt  $BRC$  jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta.$$

Trójkąt  $PAC$  jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA| = \varphi = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Prosta  $AB$  jest styczna w punkcie  $A$  do okręgu o środku  $P$ , więc  $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$ . Stąd

$$|\sphericalangle CAB| = \psi = 90^\circ - \varphi = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Miara kąta  $ACB$  w trójkącie  $ABC$  jest równa

$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - \beta - \psi = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}.$$

Suma miar kątów  $PCA$ ,  $ACB$  i  $BCR$  jest równa  $180^\circ$ , więc

$$|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCR| = 180^\circ,$$

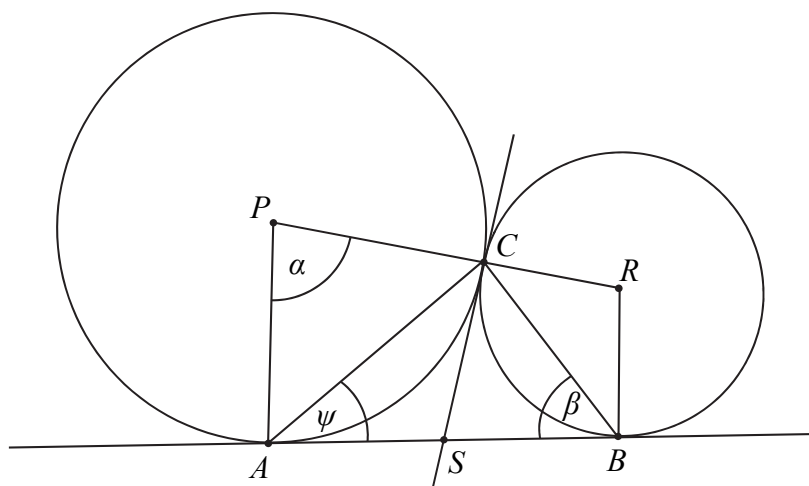
$$\varphi + \left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \delta = 180^\circ,$$

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + 90^\circ - \beta = 180^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

V sposób



Poprowadźmy przez punkt  $C$  wspólną styczną do obu okręgów. Niech  $S$  oznacza punkt jej przecięcia z prostą  $AB$ .

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że

$$\psi = \frac{\alpha}{2}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że  $|AS| = |CS| = |BS|$ . Stąd wynika, że  $S$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Odcinek  $AB$  jest średnicą tego okręgu, więc trójkąt  $ABC$  jest prostokątny. Suma miar jego kątów ostrych jest równa  $90^\circ$ , czyli

$$\beta + \psi = 90^\circ.$$

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta.$$

To kończy dowód.

### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze układ warunków wystarczający do udowodnienia równości  $\alpha = 180^\circ - 2\beta$ , np.:

- $\delta = 90^\circ - \beta$  i  $2\delta + \gamma = 180^\circ$  i  $\alpha + \gamma + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

lub

- $\gamma = 2\beta$  i  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ ,

lub

- $\delta = 90^\circ - \beta$  i  $\eta = 180^\circ - \delta$  i  $90^\circ + \beta + \eta + \alpha = 360^\circ$ ,

lub

- $\delta = 90^\circ - \beta$  i  $\varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$  i  $\psi = 90^\circ - \varphi$  i  $180^\circ - (\beta + \psi) = 180^\circ - (\varphi + \delta)$ ,

lub

- $\beta + \psi = 90^\circ$  i  $\psi = \frac{\alpha}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 29. (0–4)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.

4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej (4.i).

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Ponieważ  $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$ , stąd wartość  $p = \frac{-6+0}{2} = -3$ .

Zatem  $f(x) = a(x-p)^2 + q$  dla  $p = -3$  i  $q = 6$ .

Obliczamy współczynnik  $a$ . Wiemy, że  $f(0) = \frac{3}{2}$ , zatem

$$a(0+3)^2 + 6 = \frac{3}{2},$$

$$9a = -\frac{9}{2},$$

$$a = -\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź:  $a = -\frac{1}{2}$ .

II sposób

Z treści zadania wynika, że  $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$ :

$$\begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} 36a - 6b + c = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}, \begin{cases} b = 6a \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka:

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{6a}{2a} = -3.$$

Stąd wynika, że  $f(-3) = 6$  i  $f(x) = ax^2 + 6ax + \frac{3}{2}$ . Obliczamy współczynnik  $a$

$$a(-3)^2 + 6a \cdot (-3) + \frac{3}{2} = 6,$$

$$-9a = \frac{9}{2},$$

$$a = -\frac{1}{2}.$$

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka: np.  $p = \frac{-6+0}{2} = -3$

albo

- zapisze układ dwóch równań, np.: 
$$\begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

albo

- zapisze wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej  $f(x) = a(x-p)^2 + q$  oraz zapisze  $q = 6$ ,

albo

- zapisze równanie  $-\frac{\Delta}{4a} = 6$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze wzór funkcji  $f$  w postaci:  $f(x) = a(x+3)^2 + 6$

albo

- zapisze układ trzech równań z niewiadomymi  $a, b, c$ , np.:

$$\begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2} \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(-6)^2 + b(-6) + c = \frac{3}{2} \\ a \cdot 0 - b \cdot 0 + c = \frac{3}{2} \\ a(-3)^2 + b(-3) + c = 6 \end{cases}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą  $a$ ,

$$\text{np.: } a(0+3)^2 + 6 = \frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad a(-3)^2 + 6a \cdot (-3) + \frac{3}{2} = 6, \quad \text{lub} \quad 36a^2 + 18a = 0$$

albo

- obliczy wartości  $b$  i  $c$ :  $b = -3, c = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy wartość współczynnika  $a$ :  $a = -\frac{1}{2}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby  $-6$  i  $0$  jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa  $4\frac{1}{2}$ , to może otrzymać **4 punkty**, o ile w rozwiązaniu nie występują błędy.
2. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby  $-6$  i  $0$  jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa  $6$ , to może otrzymać **1 punkt**, o ile poprawnie wyznaczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

**Zadanie 30. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).
--------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej przez  $x$ . Wtedy dłuższa przyprostokątna ma długość  $x+14$ . Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$\begin{aligned}x^2 + (x+14)^2 &= 26^2, \\x^2 + x^2 + 28x + 196 &= 676, \\x^2 + 14x - 240 &= 0\end{aligned}$$

Stąd

$$x = 10 \text{ lub } x = -24.$$

Drugie z rozwiązań odrzucamy, zatem długości boków trójkąta są równe: 10, 24, i 26, więc obwód jest równy 60 cm.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy:

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.:  $x^2 + (x+14)^2 = 26^2$ , gdzie  $x$  jest długością krótszej przyprostokątnej

albo

- zapisze układ równań, np.:  $a^2 + b^2 = 26^2$  i  $b = a + 14$ , gdzie  $a$  jest długością krótszej oraz  $b$  długością dłuższej przyprostokątnej

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy obwód trójkąta: 60 cm.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający jedynie poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60 oraz uzasadni, że rozważany trójkąt jest prostokątny, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający podaje w rozwiązaniu tylko liczby 10, 24, 26, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 31. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).
--------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązanie**

Wyznaczamy różnicę  $r$  ciągu arytmetycznego.

W tym celu stosujemy wzory na sumę częściową  $S_3 = 3a_1 + 3r = 33$  i  $a_1 = 8$  lub zapisujemy równanie  $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 33$ .

Obliczamy  $r$ :  $r = 3$ .

Następnie obliczamy różnicę  $a_{16} - a_{13}$ , jako  $3r$  lub po wyznaczeniu  $a_{16}$  i  $a_{13}$ , czyli

$$a_{16} = 8 + 15 \cdot 3 = 53, \quad a_{13} = 8 + 12 \cdot 3 = 44.$$

$$\text{Zatem } a_{16} - a_{13} = 3r = 9.$$

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy obliczy różnicę ciągu  $r = 3$  (lub  $3r = 9$ ) lub obliczy wartość  $a_1 + r = 11$ , lub obliczy wartość  $a_2 = 11$ , lub zapisze, że  $a_{16} - a_{13} = 3r$ , lub obliczy  $a_3 = 14$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy różnicę  $a_{16} - a_{13} = 9$ .

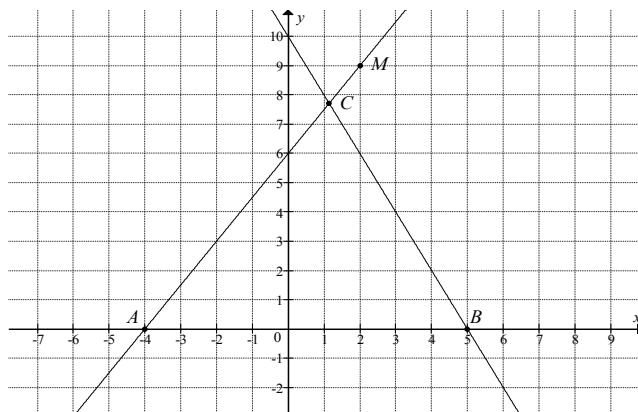
**Uwagi**

1. Jeśli zdający przyjmuje  $n = 33$  lub  $a_3 = 33$  i nie przedstawia poprawnej metody obliczenia różnicy  $a_{16} - a_{13}$ , to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda wartość  $r = 3$  i zapisze  $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$ , to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zamiast ciągu arytmetycznego rozważa ciąg geometryczny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.



**Zadanie 32. (0–5)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$ , mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik $a$ w równaniu kierunkowym oraz interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.b, 8.d).
-----------------------------------	--

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Prosta  $AM$  przechodzi przez punkty  $A = (-4, 0)$  i  $M = (2, 9)$ , więc jej równanie ma postać

$$y = \frac{9}{2+4}(x+4), \text{ czyli } y = \frac{3}{2}x + 6.$$

Prosta  $k$  o równaniu  $y = -2x + 10$  przecina oś  $Ox$  w punkcie  $B$ , więc  $B = (5, 0)$ .

Zatem  $|AB| = |5 - (-4)| = 9$ .

Współrzędne punktu  $C$  obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$y = \frac{3}{2}x + 6 \text{ i } y = -2x + 10.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x + 6 &= -2x + 10, \\ \frac{7}{2}x &= 4, \\ x &= \frac{8}{7}, \text{ a } y = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{7} + 6 = \frac{12}{7} + 6 = \frac{54}{7} \end{aligned}$$

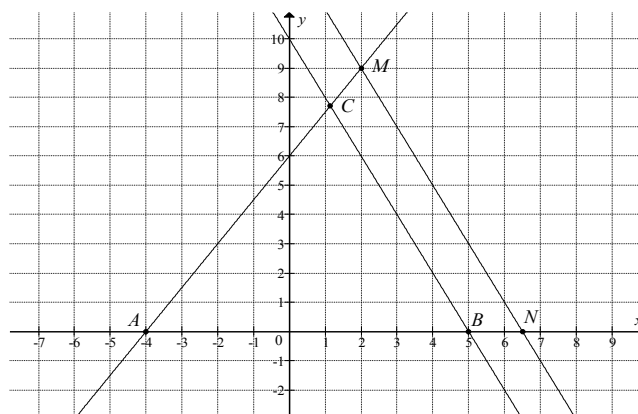
Zatem  $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$ . Wynika stąd, że wysokość  $h$  trójkąta  $ABC$  opuszczona z wierzchołka  $C$

na podstawę  $AB$  jest równa  $h = y_C = \frac{54}{7}$ .

Zatem pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{54}{7} = \frac{243}{7} = 34 \frac{5}{7}.$$

## II sposób



Wyznaczamy równanie prostej  $l$  równoległej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $M = (2, 9)$ :

$$y = -2(x - 2) + 9,$$
$$y = -2x + 13.$$

Niech  $N$  będzie punktem przecięcia prostej  $l$  z osią  $Ox$ , więc  $N = (\frac{13}{2}, 0)$ . Zatem

$$|AN| = \left| \frac{13}{2} - (-4) \right| = \frac{21}{2}.$$

Prosta  $k$  o równaniu  $y = -2x + 10$  przecina oś  $Ox$  w punkcie  $B$ , więc  $B = (5, 0)$ .

Zatem  $|AB| = |5 - (-4)| = 9$ .

Z równoległości prostych  $k$  i  $l$  wynika, że trójkąt  $ABC$  jest podobny do trójkąta  $ANM$ , a skala tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|AB|}{|AN|} = \frac{9}{\frac{21}{2}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}.$$

Pole trójkąta  $ANM$  jest równe

$$P_{ANM} = \frac{1}{2} |AN| \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9 = \frac{21 \cdot 9}{4},$$

więc pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM} = \left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot \frac{21 \cdot 9}{4} = \frac{243}{7} = 34 \frac{5}{7}.$$

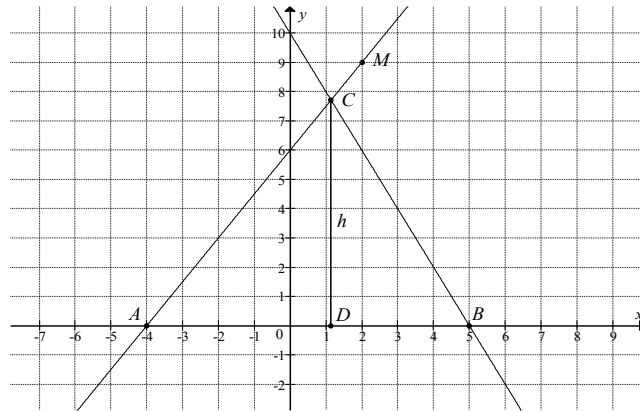
### Uwaga

Mając obliczone współrzędne wierzchołków trójkąta, możemy obliczyć jego pole, korzystając

ze wzoru  $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$ :

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| (5 + 4) \left( \frac{54}{7} - 0 \right) - 0 \cdot \left( \frac{8}{7} + 4 \right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 9 \cdot \frac{54}{7} \right| = \frac{243}{7} = 34 \frac{5}{7}.$$

### III sposób



Prosta  $k$  o równaniu  $y = -2x + 10$  przecina oś  $Ox$  w punkcie  $B$ , więc  $B = (5, 0)$ .

Zatem  $|AB| = |5 - (-4)| = 9$ .

Niech  $h = |CD|$ . Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej  $k$  jest równy  $-2$ , więc

$$|DA| = \frac{1}{2}h.$$

Zatem  $|AD| = 9 - \frac{1}{2}h$ .

Współczynnik kierunkowy prostej  $AM$  jest równy  $a_{AM} = \frac{9-0}{2-(-4)} = \frac{3}{2}$ , ale  $a_{AM} = \frac{|CD|}{|AD|}$ , więc

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{h}{9 - \frac{1}{2}h} = \frac{3}{2},$$

$$2h = 27 - \frac{3}{2}h,$$

$$\frac{7}{2}h = 27,$$

$$h = \frac{54}{7}.$$

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{54}{7} = \frac{243}{7} = 34\frac{5}{7}.$$

## Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej  $AM$ :  $a = \frac{3}{2}$

albo

- wyznaczy współrzędne punktu  $B$ :  $B = (5, 0)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze równanie prostej  $AM$ :  $y = \frac{3}{2}x + 6$

albo

- wyznaczy równanie prostej  $MN$ :  $y = -2x + 13$  i zapisze, że trójkąty  $ABC$  i  $ANM$  są podobne,

albo

- zapisze zależność między długościami odcinków  $CD$  i  $DA$ :  $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- obliczy długość podstawy  $AB$  trójkąta:  $|AB| = 9$  oraz zapisze równanie, z którego można wyznaczyć jedną ze współrzędnych punktu  $C$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$  (lub drugą współrzędną tego punktu)

i nie zapisze współrzędnych punktu  $B$ ,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta  $ABC$  do trójkąta  $ANM$ :  $s = \frac{6}{7}$  (lub skalę podobieństwa trójkąta  $ANM$  do trójkąta  $ABC$ :  $s_1 = \frac{7}{6}$ ),

albo

- obliczy pole trójkąta  $ANM$ :  $P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9$  i zapisze, że  $P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM}$ , gdzie  $s$  oznacza skalę podobieństwa trójkąta  $ABC$  do trójkąta  $ANM$ ,

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, z którego można obliczyć wysokość trójkąta  $ABC$ ,  
np.:  $\frac{h}{9 - \frac{1}{2}h} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający

- obliczy drugą współrzędną wierzchołka  $C$  oraz długość podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ :

$$y_C = \frac{54}{7}, |AB| = 9$$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$ :  $B = (5, 0)$ ,  $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$ ,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta  $ABC$  do trójkąta  $ANM$ :  $s = \frac{6}{7}$  (lub skalę podobieństwa trójkąta  $ANM$  do trójkąta  $ABC$ :  $s_1 = \frac{7}{6}$ ) oraz pole trójkąta  $ANM$ :

$$P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9 \text{ i zapisze, że } P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM},$$

albo

- obliczy wysokość  $CD$  trójkąta  $ABC$ :  $h = \frac{54}{7}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy pole trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = \frac{243}{7}$ .

**Uwaga**

Akceptujemy, jeżeli zdający poda pole trójkąta w przybliżeniu, np. 34,714.

**Zadanie 33. (0–2)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. (10.d).
--------------------------------	---

**Przykładowe rozwiązanie**

Jest to model klasyczny i liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 90$ .

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to zbiór wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych. Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne

$$A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}.$$

Stąd  $|A| = 10$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3, jest równe  $\frac{1}{9}$ .

### Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ..... 1 p.

gdy

- zapisze, że  $|\Omega| = 90$

albo

- zapisze, że  $|A| = 10$  i nie wskazuje przy tym niepoprawnych zdarzeń elementarnych

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A$ :  
12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ..... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  i wynik zapisze w postaci ułamka:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

### Uwaga

1. Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik  $P(A)$  jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli w przedstawionym rozwiązaniu zdający interpretuje zdarzenie elementarne jako rezultat wylosowania więcej niż jednej liczby, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu zapisze tylko  $\frac{1}{9}$ , to otrzymuje **0 punktów**.

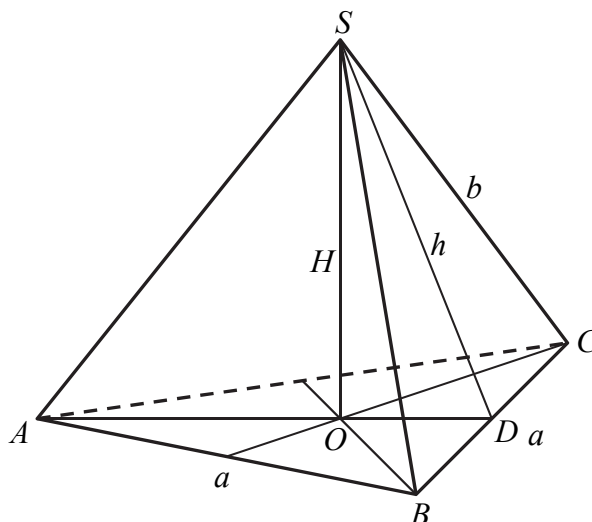
**Zadanie 34. (0–4)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.

9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).

**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wykorzystujemy wzór na pole powierzchni bocznej ostrosłupa i zapisujemy równanie

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{ skąd otrzymujemy } a = 2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DOS$  otrzymujemy

$$H^2 = h^2 - |DO|^2.$$

Ponieważ  $|DO| = \frac{1}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , więc

$$H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Stąd  $H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$ .

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}.$$

**Schemat punktowania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze równanie  $\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$

albo

- zapisze, że  $|DO| = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$  lub  $|AO| = \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy długość krawędzi  $a$  podstawy ostrosłupa:  $a = 2$  i zapisze równanie z niewiadomą  $H$ , np.:  $H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

albo

- obliczy długość krawędzi  $a$  podstawy ostrosłupa:  $a = 2$  i zapisze układ równań wystarczający do obliczenia wysokości ostrosłupa, np.: 
$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa:  $H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy objętość  $V$  ostrosłupa:  $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający rozważy inną bryłę niż podana w treści zadania, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
3. Jeżeli zdający poda długość krawędzi podstawy  $a = 2$  bez obliczeń i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przepisze liczbę  $\frac{5\sqrt{3}}{4}$  lub liczbę  $\frac{15\sqrt{3}}{4}$  i z tym błędem rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeśli zdający nie obliczy  $a$  i przyjmuje, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.