CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

| | |
|---|---|
| *Rodzaj dokumentu:* | **Zasady oceniania rozwiązań zadań** |
| *Egzamin:* | **Egzamin maturalny**<br>**Test diagnostyczny** |
| *Przedmiot:* | **Matematyka** |
| *Poziom:* | **Poziom podstawowy** |
| *Formy arkusza:* | EMAP-P0-**100**-2103, EMAP-P0-**200**-2103,<br>EMAP-P0-**300**-2103, EMAP-P0-**400**-2103,<br>EMAP-P0-**700**-2103, EMAP-P0-**Q00**-2103 |
| *Termin egzaminu:* | 4 marca 2021 r. |
| *Data publikacji dokumentu:* | 5 marca 2021 r. |

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.

## Zadanie 1. (0–1)

| **Wymagania egzaminacyjne 2021**[1] | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach […] z użyciem symboli pierwiastków, potęg);<br>2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 2. (0–1)

| **Wymagania egzaminacyjne 2021** | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

## Zadanie 3. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>1.8) wykonuje obliczenia procentowe […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 4. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 5. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>G7.5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 6. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>3.6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 7. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

## Zadanie 8. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 9. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

## Zadanie 10. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 11. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.4) stosuje wzór na $n$-ty wyraz […] ciągu geometrycznego. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 12. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.3) stosuje wzór na $n$-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 13. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 14. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>5.2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 15. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

## Zadanie 16. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

## Zadanie 17. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 18. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka;<br>8.6) oblicza odległość dwóch punktów. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 19. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>6.4) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

## Zadanie 20. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji […] tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 21. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>8.2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 22. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzącej przez dany punkt. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 23. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […]. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
B

## Zadanie 24. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 25. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość […] ostrosłupa. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
C

## Zadanie 26. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## Zadanie 27. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
D

## Zadanie 28. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>G9.3) wyznacza […] medianę zestawu danych. |

**Zasady oceniania**
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**
A

## ZADANIA OTWARTE

Uwaga: *Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania*.

### Zadanie 29. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą. |

**Zasady oceniania**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2+2x-24$.
**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej $2x^2+2x-24>0$.

**Zdający otrzymuje ................................................................................................ 1 p.**
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1=-4$ oraz $x_2=3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - odczyta z wykresu funkcji $f(x)=2x^2+2x-24$ i zapisze miejsca zerowe i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

ALBO

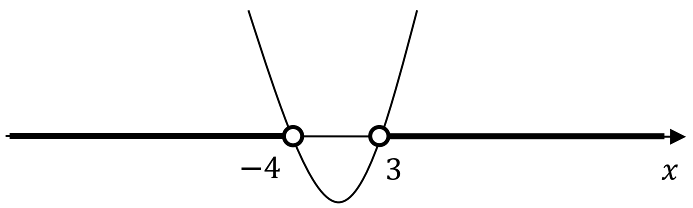
- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

**Zdający otrzymuje ................................................................................................ 2 p.**
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$ lub $x\in(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$

ALBO

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



**Uwagi:**
1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik $\Delta$ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-4, -\infty) \cup (3, +\infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

**Pierwszy etap rozwiązania**
Zapisujemy nierówność w postaci $2x^2 + 2x - 24 > 0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $2x^2 + 2x - 24$.
Obliczamy wyróżnik tego trójmianu: $\Delta = 196$ i stąd $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

Stosujemy wzory Viète'a:
$x_1 \cdot x_2 = -12$ oraz $x_1 + x_2 = -1$, stąd $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

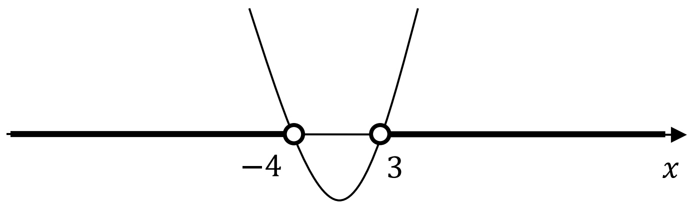
ALBO

Podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu: $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

ALBO

Sporządzamy wykres funkcji $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$, zaznaczamy miejsca zerowe na wykresie i podpisujemy $x_1 = -4$ oraz $x_2 = 3$.

**Drugi etap rozwiązania**
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$ lub $x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$ lub



## Zadanie 30. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […]. |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 1 p.**
gdy poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ............................................................................................................ 2 p.**
gdy obliczy pierwiastki równania: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

**Uwaga:**
Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe i poprawnie je rozwiąże, to otrzymuje **1 punkt**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Równanie ma sens liczbowy dla $x \neq \frac{2}{3}$.
Przekształcamy równanie:

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x+2$$

$$6x - 1 = (3x-2)(3x+2)$$

$$6x - 1 = 9x^2 - 4$$

$$-9x^2 + 6x + 3 = 0 \quad /:(-3)$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.
Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $3x^2 - 2x - 1$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$
i stąd $x_1 = -\frac{1}{3}$ oraz $x_2 = 1$.

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby $\frac{2}{3}$, więc są rozwiązaniami danego równania.

## Zadanie 31. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu. |

### Zasady oceniania

dla sposobów 1. oraz 2.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 1 p.**
gdy:

- zapisze, że $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AOC} + P_{\Delta ABO}$

ALBO

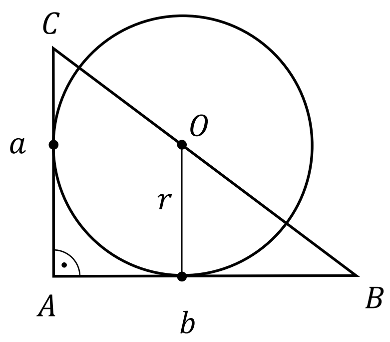
- zapisze związek pomiędzy $a$, $b$ i $r$, który wynika z proporcjonalności odpowiednich boków trójkątów podobnych $DOC$ i $ABC$ (lub $DOC$ i $EBO$, lub $EBO$ i $ABC$), np.:

$$\frac{a-r}{r} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a-r}{r} = \frac{r}{b-r}, \qquad \frac{r}{b-r} = \frac{a}{b}$$

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................ 2 p.**
gdy wykaże, że $r = \frac{a \cdot b}{a+b}$ .

### Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób 1.




Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.
Pole trójkąta $ABC$ jest sumą pól trójkątów $ABO$ i $AOC$.
Promień okręgu poprowadzony z punktu $O$ do punktu styczności okręgu z odcinkiem $AB$ jest prostopadły do tego odcinka, więc $P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$. Podobnie $P_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$. Zatem

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r = \frac{1}{2}(a+b) \cdot r$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}(a+b) \cdot r$$

$$r = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

To należało wykazać.

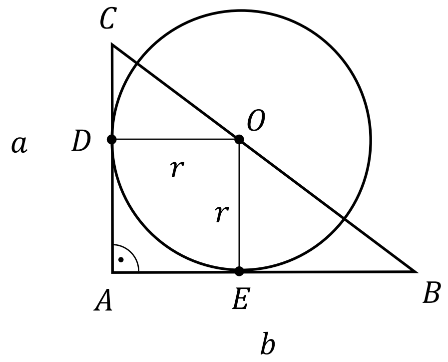
<u>Sposób 2.</u>

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A$, $B$, $C$ – wierzchołki trójkąta,

$D$ – punkt styczności przyprostokątnej $AC$ z okręgiem,

$E$ – punkt styczności przyprostokątnej $AB$ z okręgiem. (Zobacz rysunek).




Ponieważ odcinek $OD$ jest prostopadły do odcinka $AC$ oraz $|\sphericalangle DCO| = |\sphericalangle ACB|$, więc trójkąty $DCO$ i $ABC$ są podobne (na podstawie cechy *kkk* podobieństwa trójkątów). Stąd

$$\frac{|DC|}{|DO|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Odcinek $OE$ jest prostopadły do $AB$, więc $|DC| = |AC| - |OE| = a - r$. Zatem

$$\frac{a-r}{r} = \frac{a}{b}$$

$$(a-r)\cdot b = a \cdot r$$

$$ab - rb = ar$$

$$ab = rb + ra$$

$$ab = (a+b)r$$

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

To należało wykazać.

**Zadanie 32. (0–2)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […]. |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **1 p.**

gdy podniesie obie strony równości $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ do kwadratu i otrzyma $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ........................................................................................................ **2 p.**

gdy obliczy wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Podnosimy obie strony równości $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ do kwadratu i otrzymujemy:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{49}{25}$$

Korzystamy z zależności $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i otrzymujemy $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25}$, stąd po przekształceniu mamy: $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25}$.

## Zadanie 33. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów. |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................1 p.**
gdy:
- zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze równość prowadzącą do obliczenia wysokości trójkąta równoramiennego $BCD$ opuszczonej na podstawę tego trójkąta, np.: $h^2 = 13^2 - 5^2$

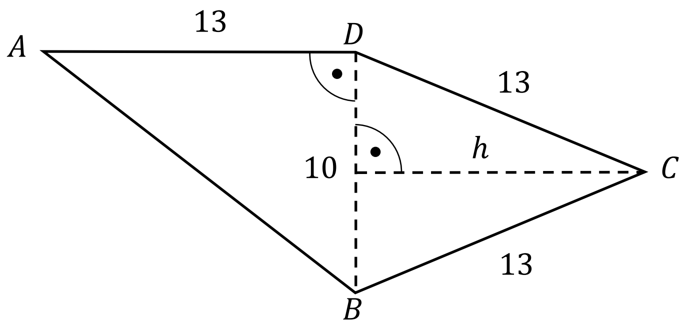
ALBO
- obliczy ze wzoru Herona pole trójkąta $BCD$

ALBO
- obliczy pole trójkąta $ABD$.

**Zdający otrzymuje ........................................................................................................2 p.**
gdy zapisze, że pole czworokąta $ABCD$ jest równe $125$.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przekątna $BD$ dzieli czworokąt $ABCD$ na trójkąt prostokątny $ABD$ oraz trójkąt równoramienny $BCD$ (zobacz rysunek).




Pole trójkąta prostokątnego $ABD$ jest równe $65$. Obliczamy wysokość $h$ trójkąta równoramiennego $BCD$ poprowadzoną z wierzchołka $C$. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$.
Pole trójkąta $BCD$ jest równe $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$. Pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól obu trójkątów: $P_{ABCD} = 60 + 65 = 125$.

**Uwaga:**
Pole trójkąta $BCD$ można obliczyć ze wzoru Herona:

$$P_{BCD} = \sqrt{18 \cdot (18-10) \cdot (18-13) \cdot (18-13)} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

## Zadanie 34. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymaganie szczegółowe** |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>4.10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje ............................................................................................. 1 p.**
gdy zapisze, że $f(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$.
**Zdający otrzymuje ............................................................................................. 2 p.**
gdy wykaże, że $1 + c > b$.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ nie ma miejsc zerowych, więc $f(x) > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej $x$. W szczególności $f(-1) = 1 - b + c > 0$, czyli $1 + c > b$.
To należało wykazać.

## Zadanie 35. (0–5)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 | |
|---|---|
| **Wymaganie ogólne** | **Wymagania szczegółowe** |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.3) stosuje wzory na $n$-ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;<br>5.4) stosuje wzory na $n$-ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |

**Zasady oceniania**

dla sposobów 1 oraz 2.

**Zdający otrzymuje ..................................................................................................1 p.**

gdy:

- wykorzysta wzór na sumę $S_5$ i zapisze równanie z niewiadomymi $a_1$ oraz $r$: $\frac{(a_1+a_1+4r)\cdot 5}{2}=10$

ALBO

- wykorzysta wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisze

$$a_1+a_1+r+a_1+2r+a_1+3r+a_1+4r=10$$

ALBO

- uzależni $a_3, a_5, a_{13}$ od $a_1$ oraz $r$ i zapisze równość wynikającą z własności ciągu geometrycznego: $(a_1+4r)^2=(a_1+2r)(a_1+12r)$.

**Zdający otrzymuje .................................................................................................. 2 p.**

gdy:

- obliczy trzeci wyraz ciągu arytmetycznego $a_3$: $a_3=a_1+2r=2$

ALBO

- zapisze układu równań z niewiadomymi $a_1$ oraz $r$, np.:

$$\begin{cases} \frac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}=10 \\ (a_1+4r)^2=(a_1+2r)(a_1+12r) \end{cases}$$

**Zdający otrzymuje .................................................................................................. 3 p.**

gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą ($r$ lub $a_1$), np.:

$(2+2r)^2=2\cdot(2+10r)$ lub $(a_1)^2+2a_1-8=0$ lub $r^2-3r=0$.

**Zdający otrzymuje .................................................................................................4 p.**
gdy:

- rozwiąże równanie $r^2 - 3r = 0$: $r = 0$ oraz $r = 3$

ALBO

- rozwiąże równanie $(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$ : $a_1 = -4$ lub $a_1 = 2$

ALBO

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Zdający otrzymuje ................................................................................................. 5 p.**
gdy wyznaczy wzór na $n$-ty wyraz podanego ciągu $a_n$: $a_n = -4 + (n-1) \cdot 3$, $a_n = 3n - 7$.

**Uwaga:**
Jeśli zdający nie odrzuci rozwiązania $r = 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Sposób 1.

Z warunków zadania wiemy, że $S_5 = 10$, czyli $\frac{(a_1+a_1+4r)\cdot 5}{2} = 10$.
Po przekształceniu ostatniej zależności otrzymujemy: $a_1 + 2r = 2 = a_3$.
Z warunków zadania wiemy, że wyrazy $a_3 = 2$, $a_5 = a_3 + 2r$, $a_{13} = a_3 + 10r$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Stąd mamy $(2+2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r)$. Otrzymujemy równanie kwadratowe $r^2 - 3r = 0$, którego rozwiązaniami są liczby $r = 0$ oraz $r = 3$. Odrzucamy odpowiedź $r = 0$, ponieważ ciąg arytmetyczny jest rosnący.
Dla $r = 3$ obliczamy $a_1$: $a_1 = a_3 - 2r = 2 - 6 = -4$.
Wyznaczamy wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = -4 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 7.$$

Sposób 2.

Z warunków zadania wiemy, że $S_5 = 10$, czyli $\frac{(a_1+a_1+4r)\cdot 5}{2} = 10$.
Z własności ciągu geometrycznego $(a_5)^2 = a_3 \cdot a_{13}$ , co zapisujemy w postaci:

$(a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r)$.

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

z którego obliczamy wartość pierwszego wyrazu ciągu i różnicę ciągu, np.:

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{2}a_1 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{2}a_1 \\ (4 - a_1)^2 = 2 \cdot (12 - 5a_1) \end{cases}$$

$$16 - 8a_1 + (a_1)^2 = 24 - 10a_1$$

$$(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$a_1 = -4 \text{ lub } a_1 = 2$$

Dla $a_1 = -4$ otrzymujemy $r = 3$, natomiast dla $a_1 = 2$ otrzymujemy $r = 0$.
Ciąg arytmetyczny jest rosnący, więc $r = 0$ odrzucamy.
Wyznaczamy wzór na $n$-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = -4 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 7.$