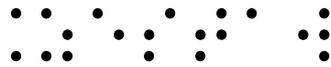


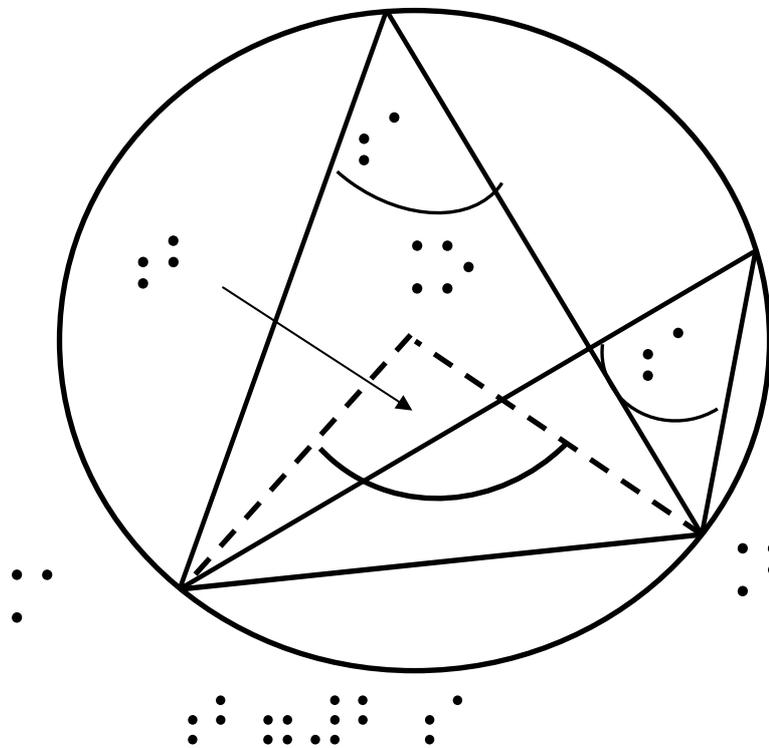
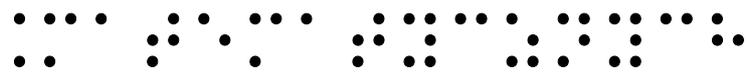
ZESTAW



WYBRANYCH WZORÓW



MATEMATYCZNYCH

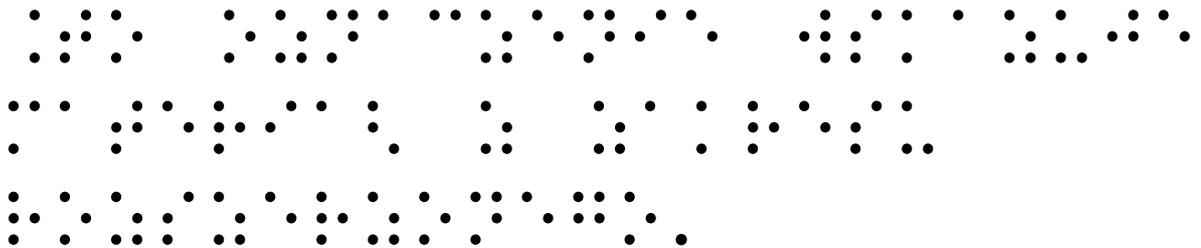


Materiały pomocnicze opracowane dla potrzeb egzaminu maturalnego i dopuszczone jako pomoce egzaminacyjne.

Zestaw matematycznych wzorów został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki. Zestaw ten został opracowany w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej we współpracy z pracownikami wyższych uczelni oraz w konsultacji z ekspertami z okręgowych komisji egzaminacyjnych.

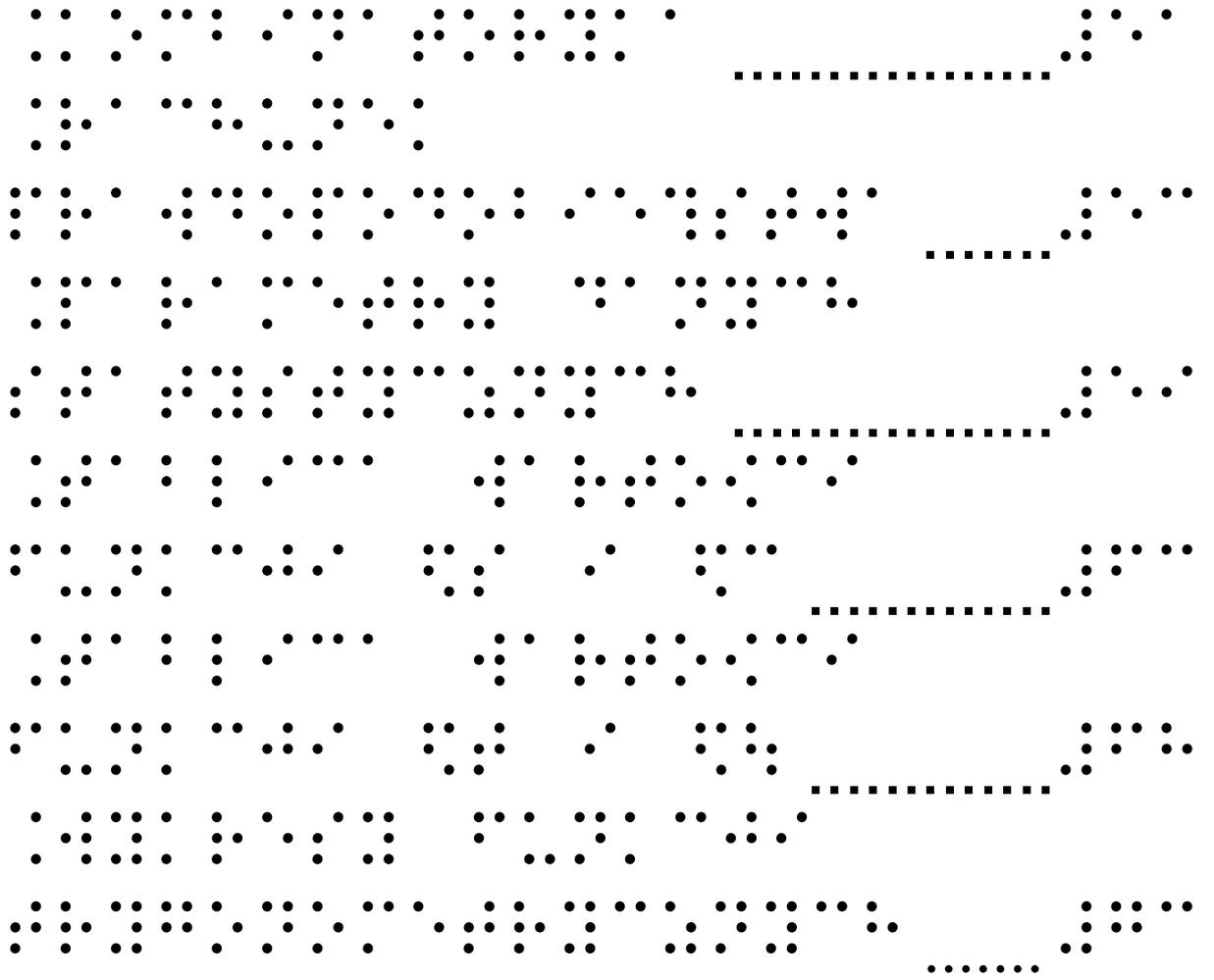
Na zlecenie CKE zestaw wzorów matematycznych dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki dla niewidomych i słabo widzących przystosowały mgr Bogumiła Golańska i mgr inż. Agnieszka Lato w Specjalnym Ośrodku Szkolno Wychowawczym dla Dzieci Niewidomych i Słabowidzących, Kraków ul. Tyniecka 7. Tablice zostały opracowane w oparciu o: „Brajłowską notację matematyczną, fizyczną, chemiczną”, praca zbiorowa pod redakcją mgr inż. J. Świerczka, Kraków 2002.

To oznaczenie wskazuje materiał z zakresu rozszerzonego.



SPIS TREŚCI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----



Wartość bezwzględna

4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99



100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400

$2^3 = 8$ $3^2 = 9$ $4^1 = 4$ $5^0 = 1$ $6^{-1} = \frac{1}{6}$
 $7^2 = 49$ $8^3 = 512$ $9^4 = 6561$ $10^5 = 100000$
 $11^6 = 1771561$ $12^7 = 35831808$ $13^8 = 815730721$ $14^9 = 2069886016$
 $15^{10} = 37509125000$ $16^{11} = 167772160000$ $17^{12} = 6272828640000$ $18^{13} = 50653306752000$

Potęgi i pierwiastki

$2^3 = 8$ $3^2 = 9$ $4^1 = 4$ $5^0 = 1$ $6^{-1} = \frac{1}{6}$
 $7^2 = 49$ $8^3 = 512$ $9^4 = 6561$ $10^5 = 100000$
 $11^6 = 1771561$ $12^7 = 35831808$ $13^8 = 815730721$ $14^9 = 2069886016$
 $15^{10} = 37509125000$ $16^{11} = 167772160000$ $17^{12} = 6272828640000$ $18^{13} = 50653306752000$

$2^3 = 8$ $3^2 = 9$ $4^1 = 4$ $5^0 = 1$ $6^{-1} = \frac{1}{6}$
 $7^2 = 49$ $8^3 = 512$ $9^4 = 6561$ $10^5 = 100000$
 $11^6 = 1771561$ $12^7 = 35831808$ $13^8 = 815730721$ $14^9 = 2069886016$
 $15^{10} = 37509125000$ $16^{11} = 167772160000$ $17^{12} = 6272828640000$ $18^{13} = 50653306752000$

.....

.....

.....

Wzory skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ & (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ & (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\ & (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ & (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ & (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ & (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ & (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ & (a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \\ & (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\ & (a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\ & (a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \\ & (a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7 \\ & (a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8 \\ & (a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8 \\ & (a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9 \\ & (a-b)^9 = a^9 - 9a^8b + 36a^7b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9ab^8 - b^9 \\ & (a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10} \\ & (a-b)^{10} = a^{10} - 10a^9b + 45a^8b^2 - 120a^7b^3 + 210a^6b^4 - 252a^5b^5 + 210a^4b^6 - 120a^3b^7 + 45a^2b^8 - 10ab^9 + b^{10} \end{aligned}$$

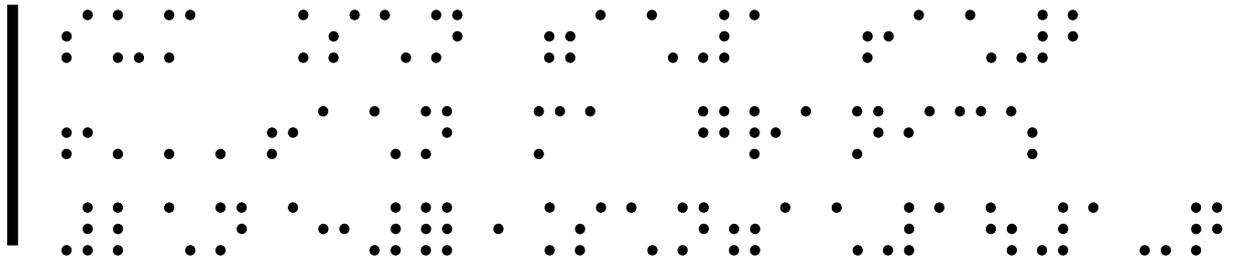


W tym celu należy przede wszystkim
zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach i szkołach
zajęciach pozaszkolnych.

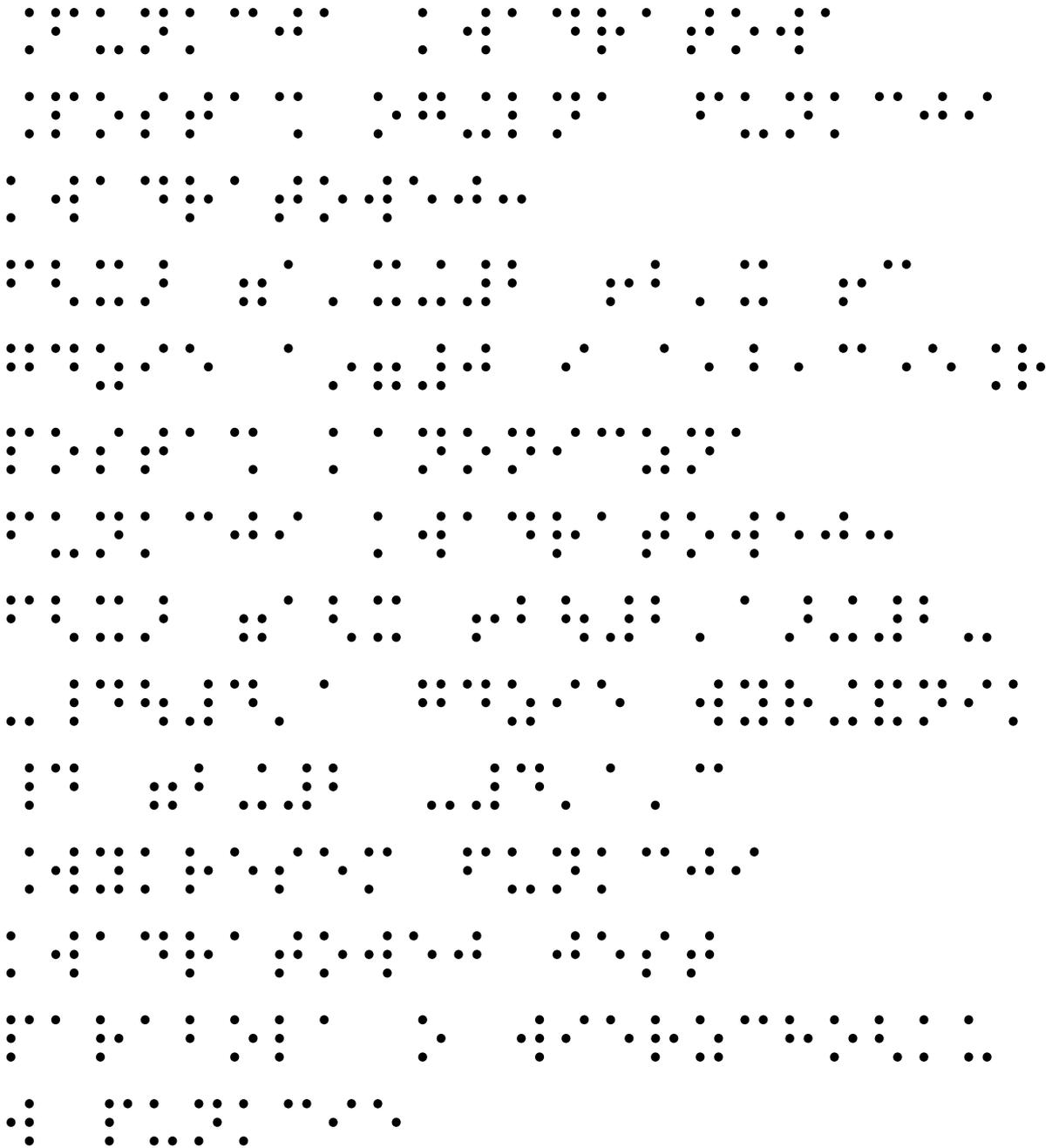
W tym celu należy przede wszystkim
zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach i szkołach
zajęciach pozaszkolnych. W tym celu należy przede
wszystym zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach
i szkołach zajęciach pozaszkolnych. W tym celu
należy przede wszystkim zwiększyć liczbę miejsc
w przedszkolach i szkołach zajęciach pozaszkolnych.
W tym celu należy przede wszystkim zwiększyć
liczbę miejsc w przedszkolach i szkołach zajęciach
pozaszkolnych. W tym celu należy przede
wszystym zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach
i szkołach zajęciach pozaszkolnych.

Procent składany

W tym celu należy przede wszystkim
zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach i szkołach
zajęciach pozaszkolnych. W tym celu należy przede
wszystym zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach
i szkołach zajęciach pozaszkolnych. W tym celu
należy przede wszystkim zwiększyć liczbę miejsc
w przedszkolach i szkołach zajęciach pozaszkolnych.
W tym celu należy przede wszystkim zwiększyć
liczbę miejsc w przedszkolach i szkołach zajęciach
pozaszkolnych. W tym celu należy przede
wszystym zwiększyć liczbę miejsc w przedszkolach
i szkołach zajęciach pozaszkolnych.



Funkcja kwadratowa



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

.....

Logarytmy

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a x = \log_a x \cdot \log_a y + \log_a x \cdot \log_a z$$

$$\log_a x \cdot \log_a y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

$$\log_a x = \log_a y \iff x = y^a$$

Pochodna funkcji

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

Równanie stycznej

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

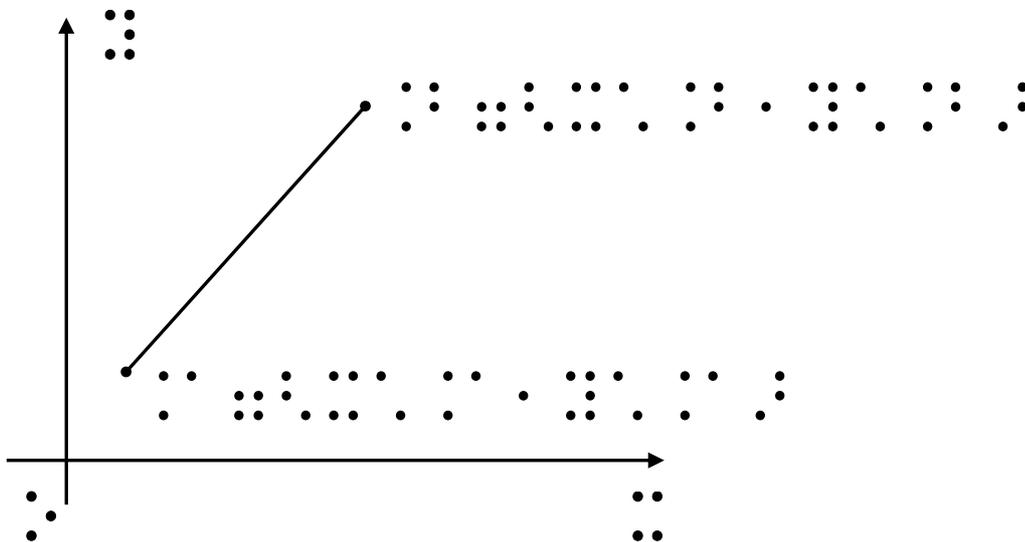
5. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

6. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

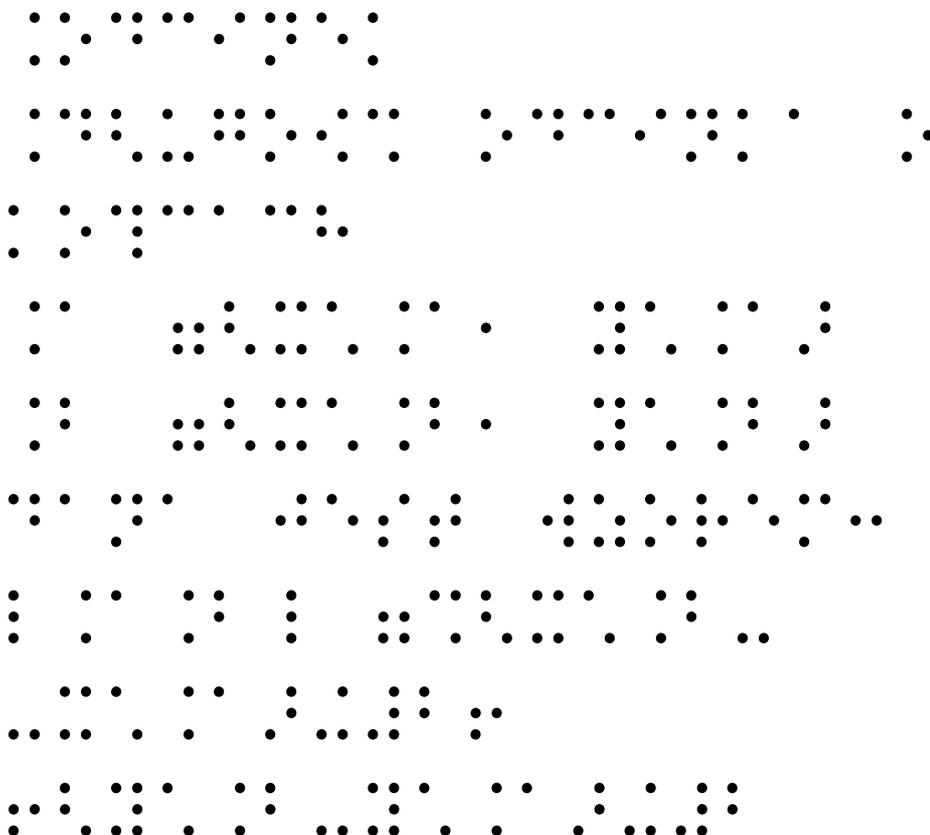
7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

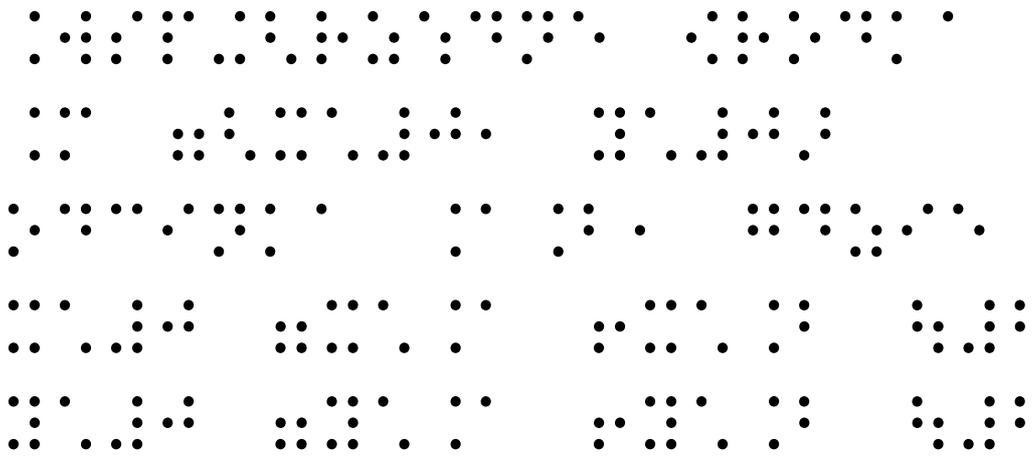
Geometria analityczna



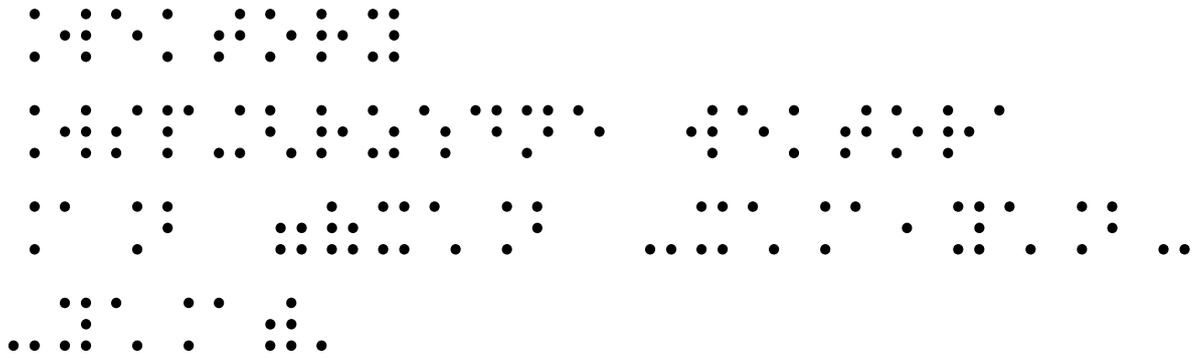
Odcinek



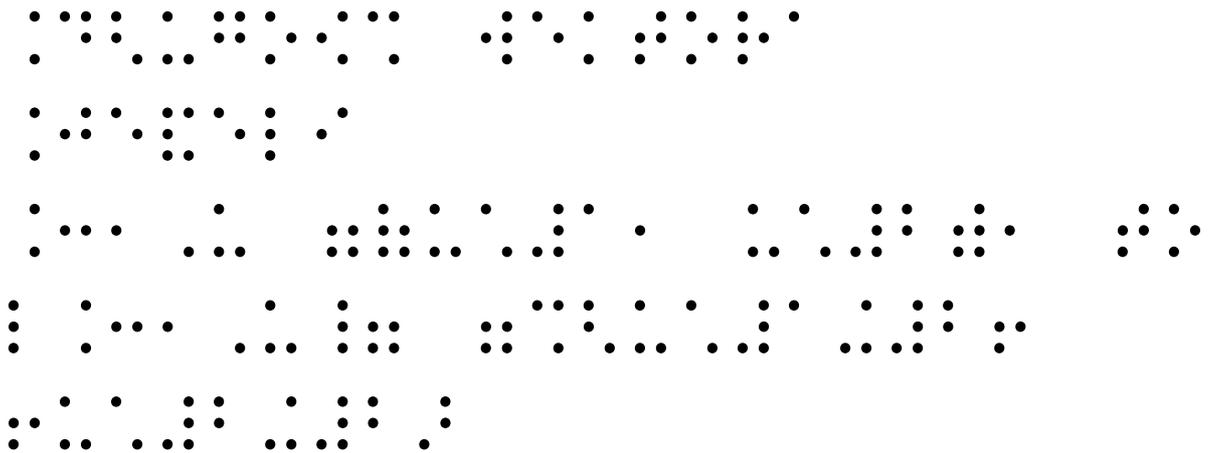
Środek odcinka

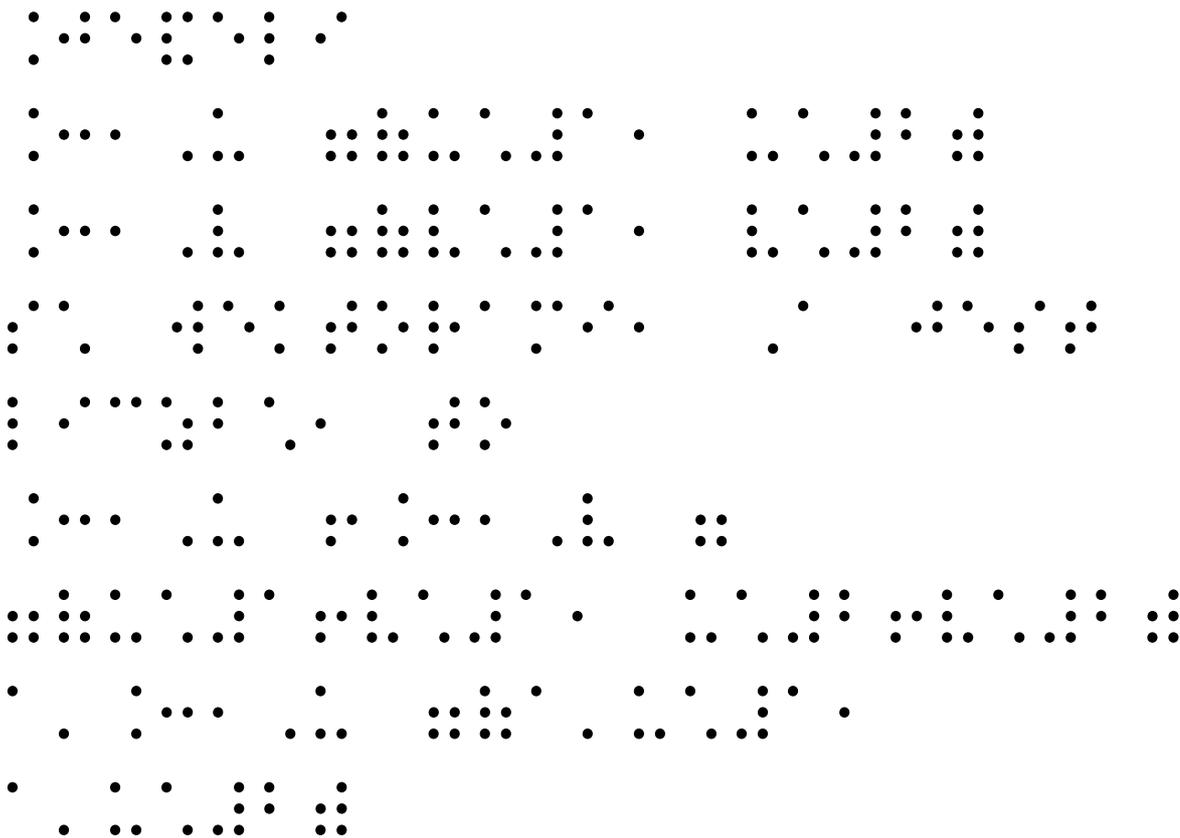


Wektory

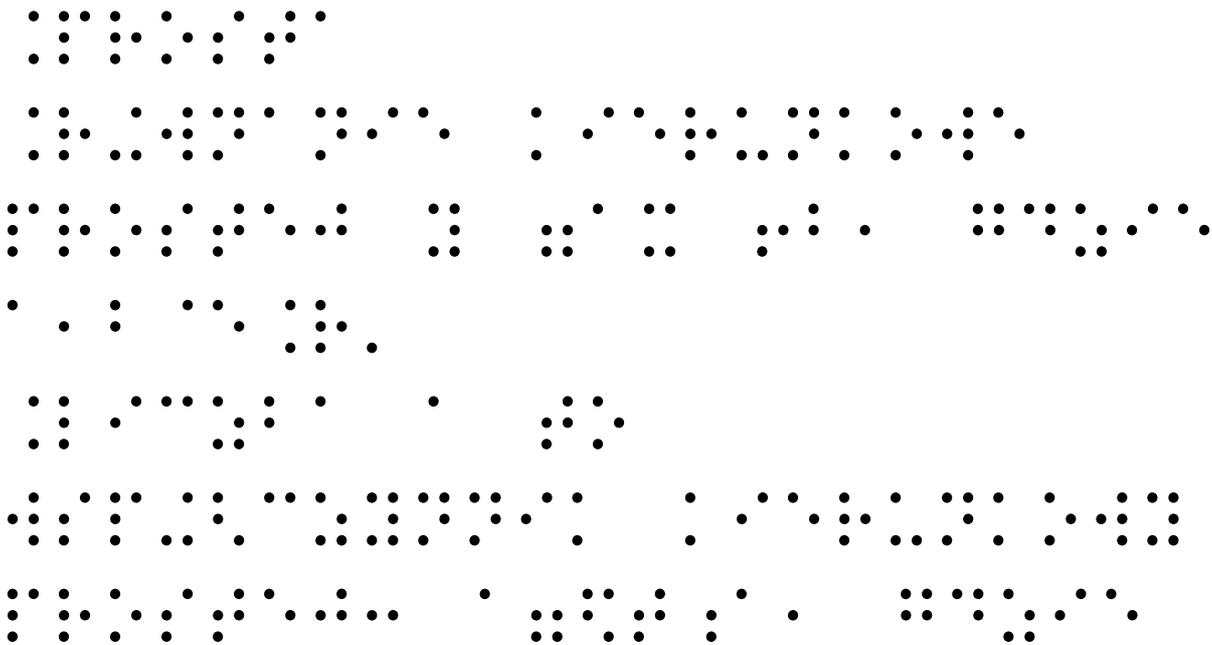


Długość wektora





Prosta



• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

...
...
... ..

...
...
... ..
...
...
...
...
... ..

Prosta i punkt

...
...
...
...
...
... ..

... ..

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Para prostych

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Warunek równoległości

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Warunek prostokątności

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Kąt między prostymi

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$



$\alpha \parallel \beta$
 $\gamma \parallel \delta$
 $\alpha \perp \gamma$
 $\beta \perp \delta$
 $\alpha \perp \delta$
 $\beta \perp \gamma$

Warunek równoległości

$\alpha \parallel \beta$
 $\gamma \parallel \delta$
 $\alpha \perp \gamma$
 $\beta \perp \delta$

Warunek prostopadłości

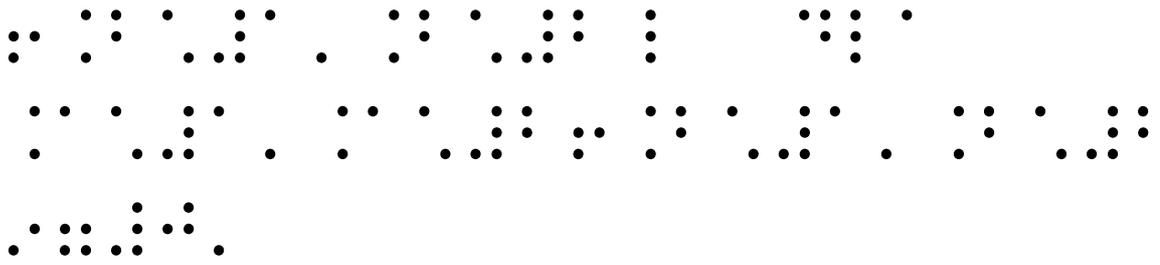
$\alpha \parallel \beta$
 $\gamma \parallel \delta$
 $\alpha \perp \gamma$
 $\beta \perp \delta$

Kąt między prostymi

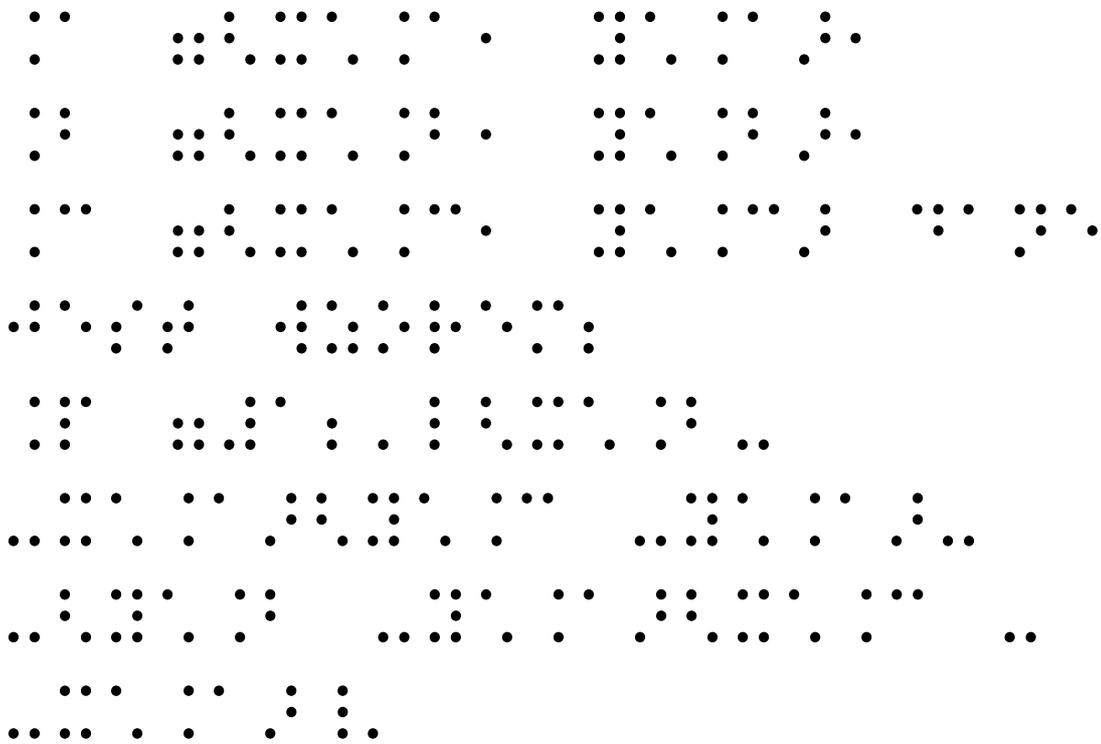
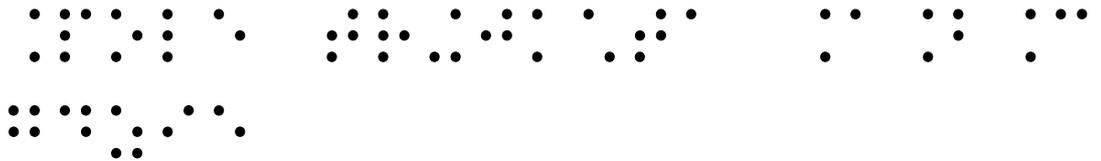


$\alpha \parallel \beta$
 $\gamma \parallel \delta$
 $\alpha \perp \gamma$
 $\beta \perp \delta$

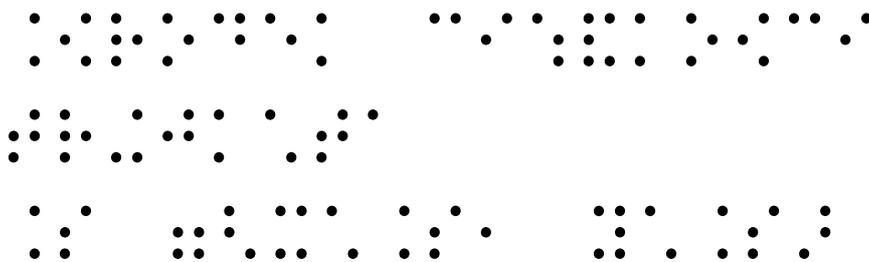
$\alpha \parallel \beta$
 $\gamma \parallel \delta$

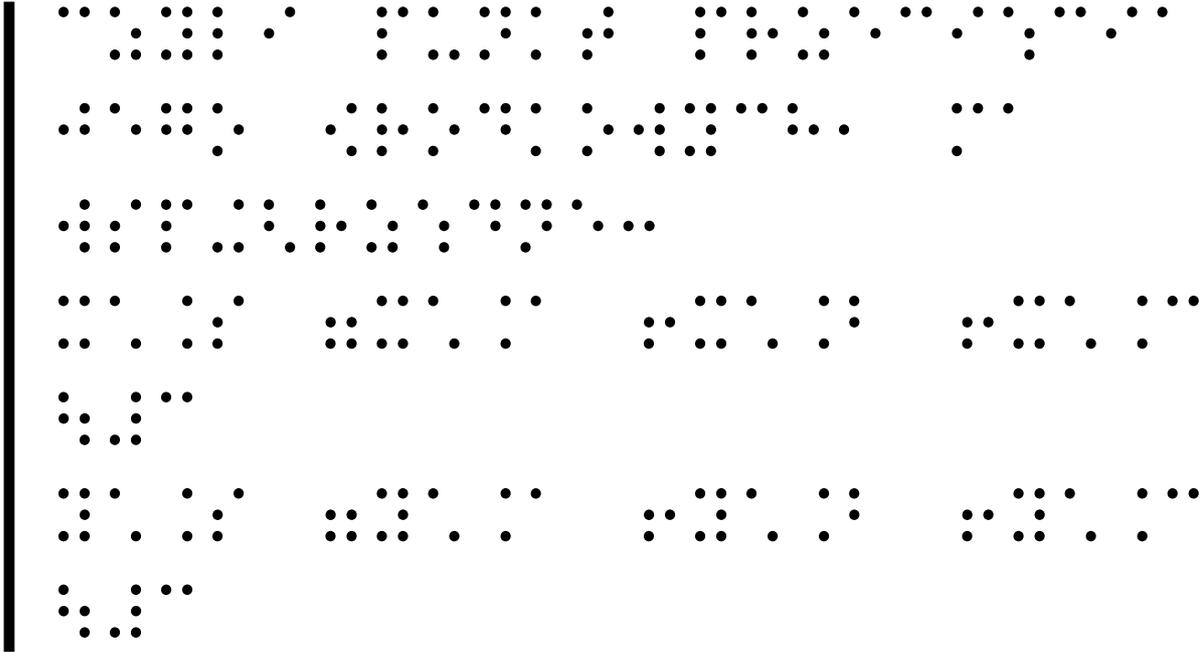


Trójkąt

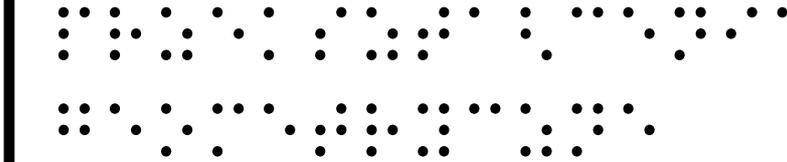


Środek ciężkości trójkąta

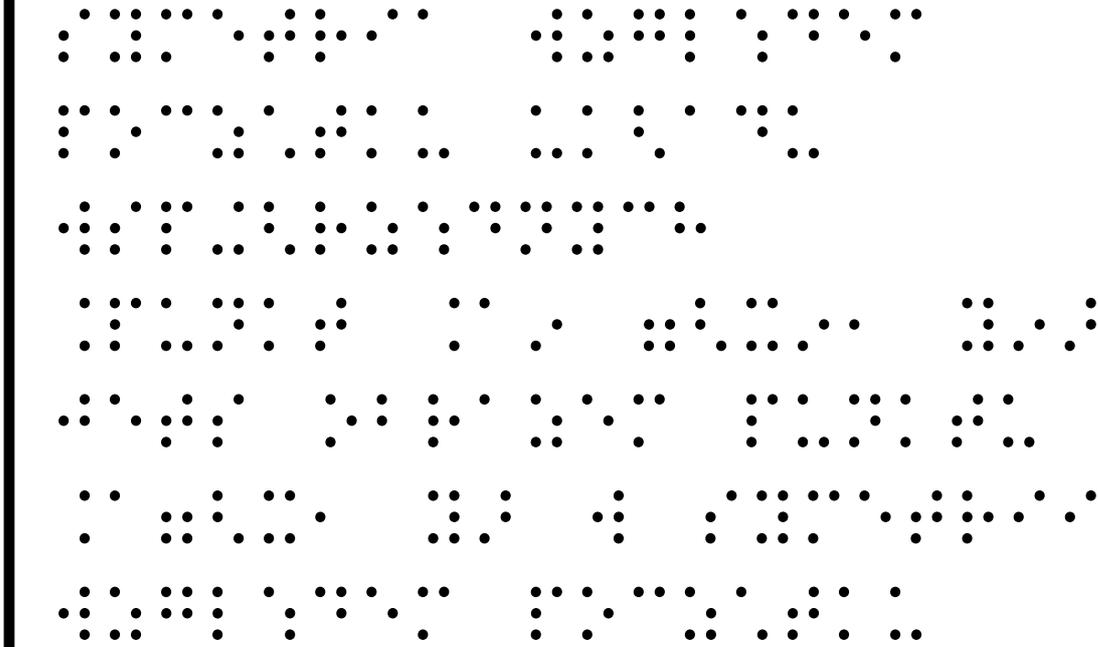


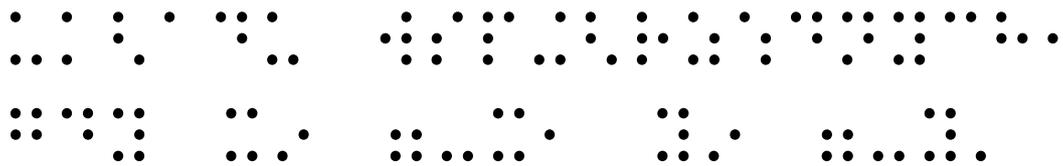


Przekształcenia geometryczne

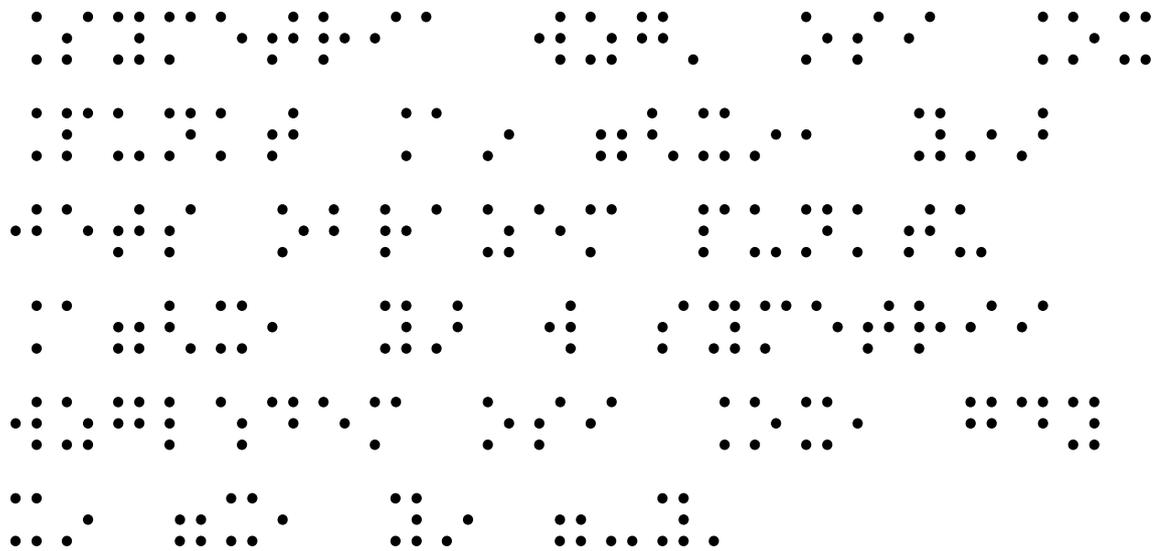


Symetria względem początku układu współrzędnych

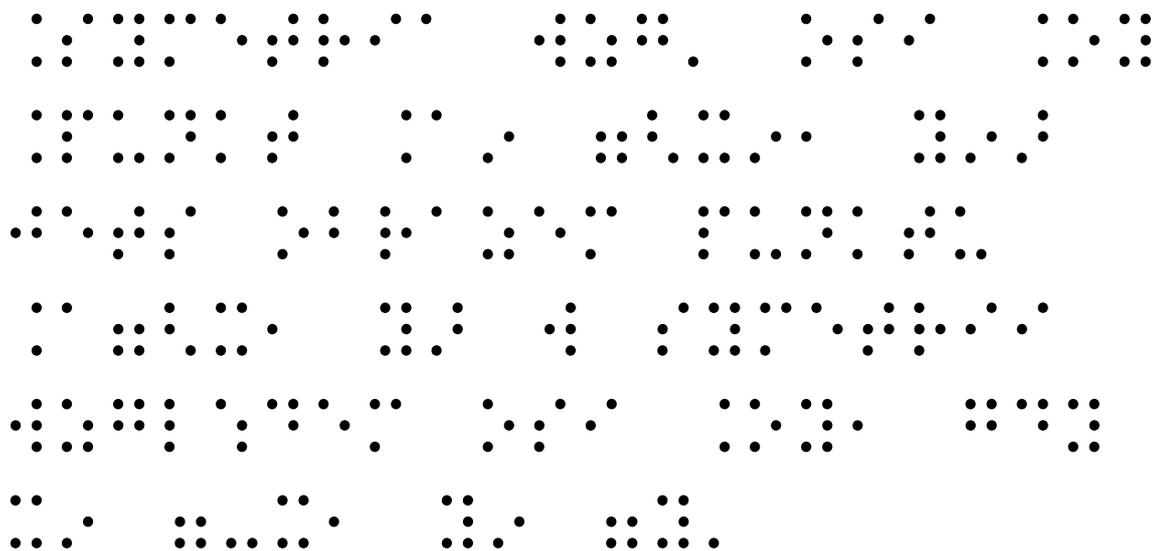




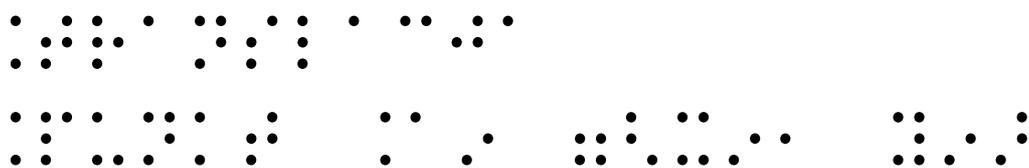
Symetria względem osi OX



Symetria względem osi OY



Translacja (przesunięcie równoległe)



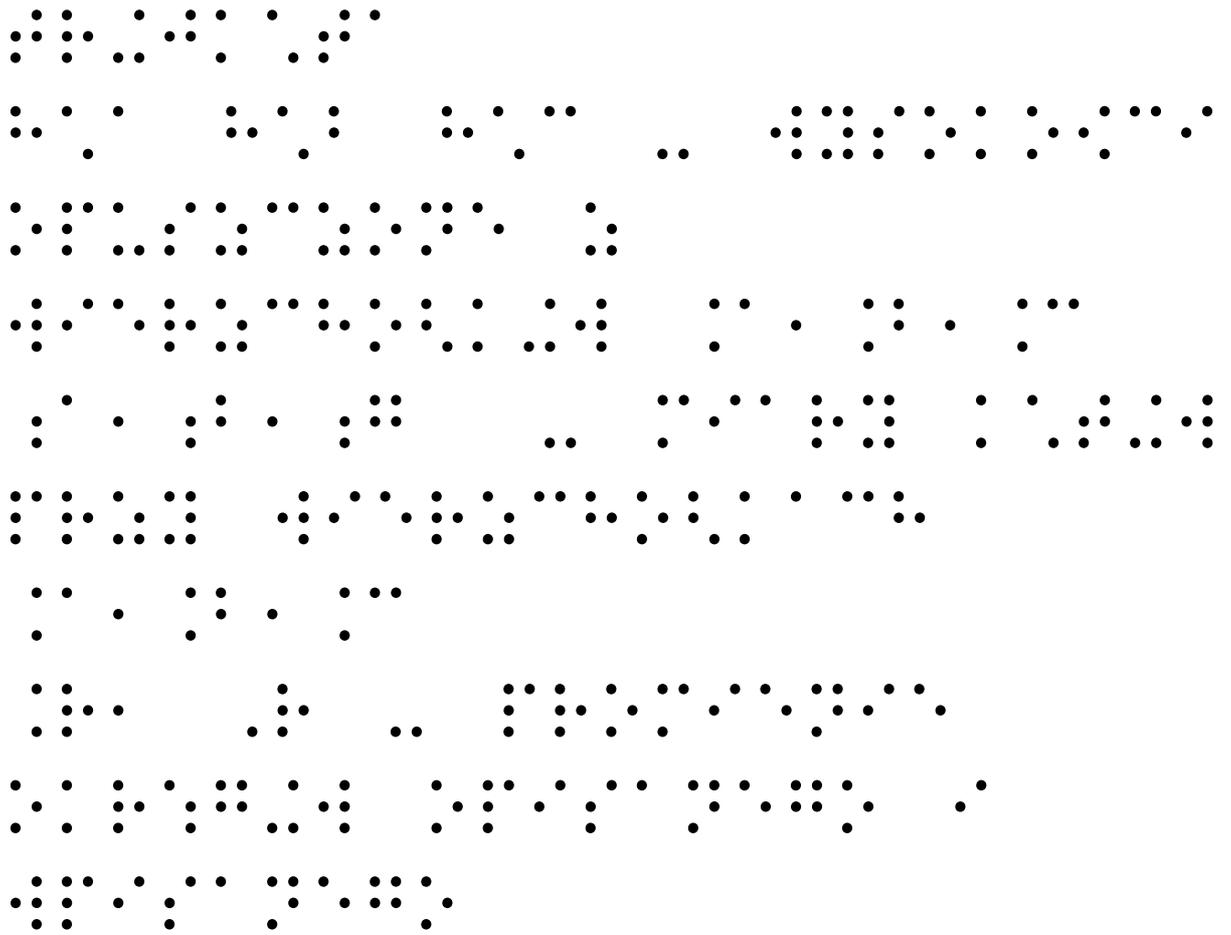
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Jednokładność

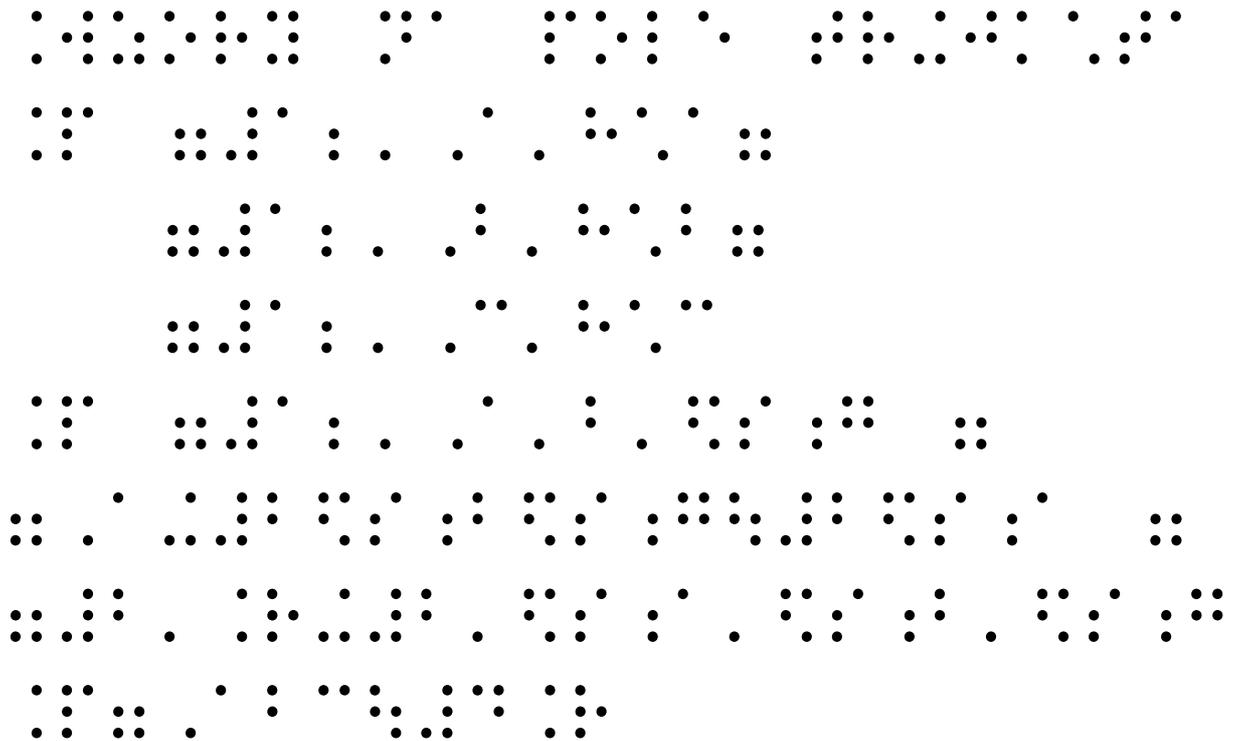
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Równanie okręgu

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Wzory na pole trójkąta



••••
•••••

Wzór Herona

••••••••••••••••
••••••••••••••••
••

Twierdzenie sinusów

••
••
••

Twierdzenie cosinusów

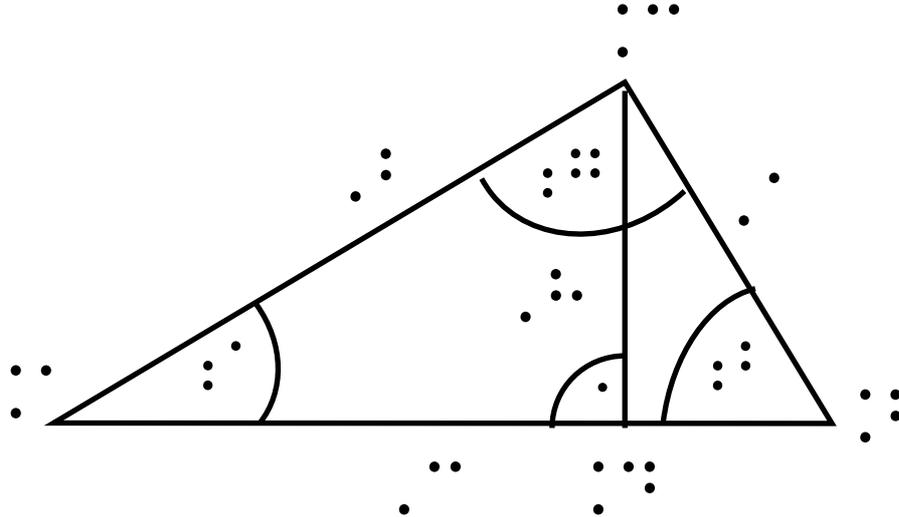
••••••••••••••••••••••••••••••••••••••~
••••••••••••••~•••••••••••••••••~•••••••~
••••••••••~••••••••••••~••••••••••••~••••••~
•••••••••••••~••••••••••~••••••••~••••••••••

Twierdzenie Pitagorasa

•••••••••••••~••••••••••~••••••••••••~••••••~
••••••••~••••~••••••••~••••••••~••••••••••
••••~••••~••••••~••••~••••••~••••••~••••••••

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

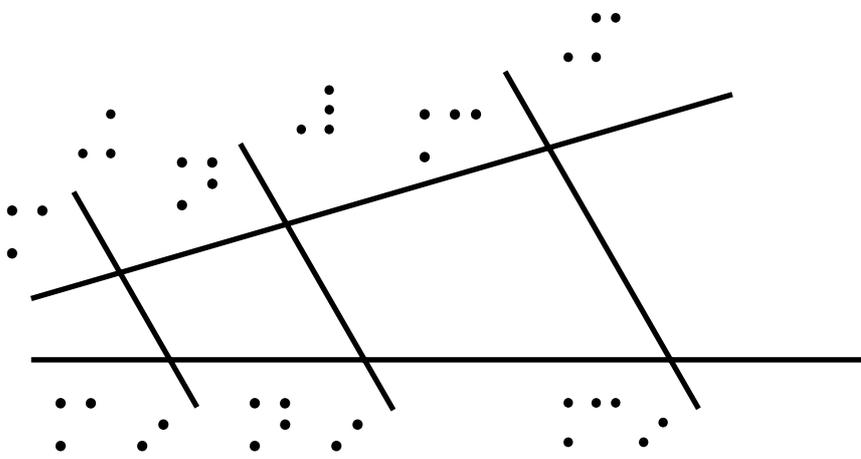
$a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta = c \cdot \sin \gamma$
 $a \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta = c \cdot \cos \gamma$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$
 $\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta} = \frac{c}{\cos \gamma}$
 $\frac{a}{\tan \alpha} = \frac{b}{\tan \beta} = \frac{c}{\tan \gamma}$
 $\frac{a}{\cot \alpha} = \frac{b}{\cot \beta} = \frac{c}{\cot \gamma}$

Twierdzenie Talesa

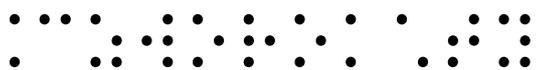
Prosta l jest styczna do koła z ośrodkiem O i promieniem r . Prosta m przecina l w punkcie A . Prosta n przecina l w punkcie B .



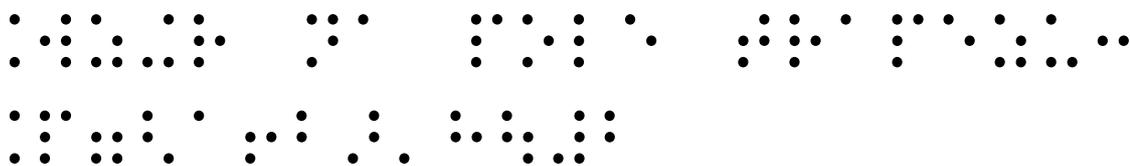
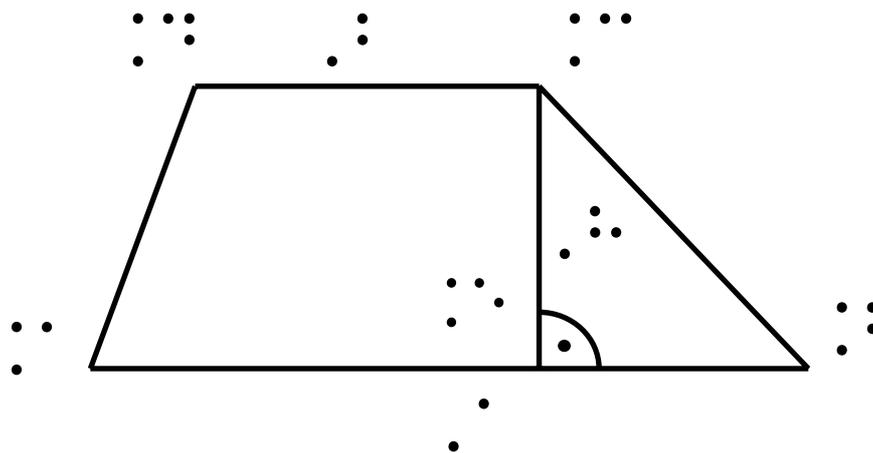
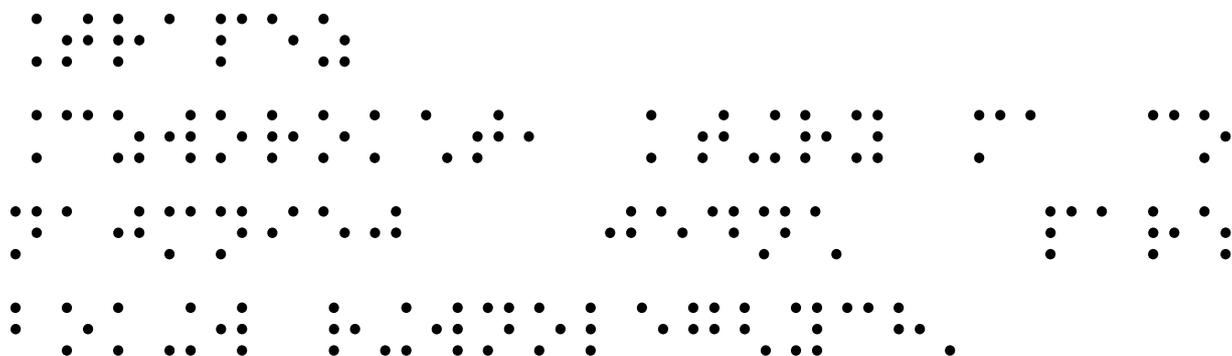
Prosta l jest styczna do koła z ośrodkiem O i promieniem r . Prosta m przecina l w punkcie A . Prosta n przecina l w punkcie B . Prosta o przechodzi przez ośrodek O i jest prostopadła do l . Punkt T jest punktem styczności. Odcinki OA i OB są równe, ponieważ $\triangle OAT$ i $\triangle OBT$ są przystające (kąt prosty przy T , bok wspólny OT , bok $AT = BT$ z jednej strony). Zatem $OA = OB$.

•••

Czworokąty

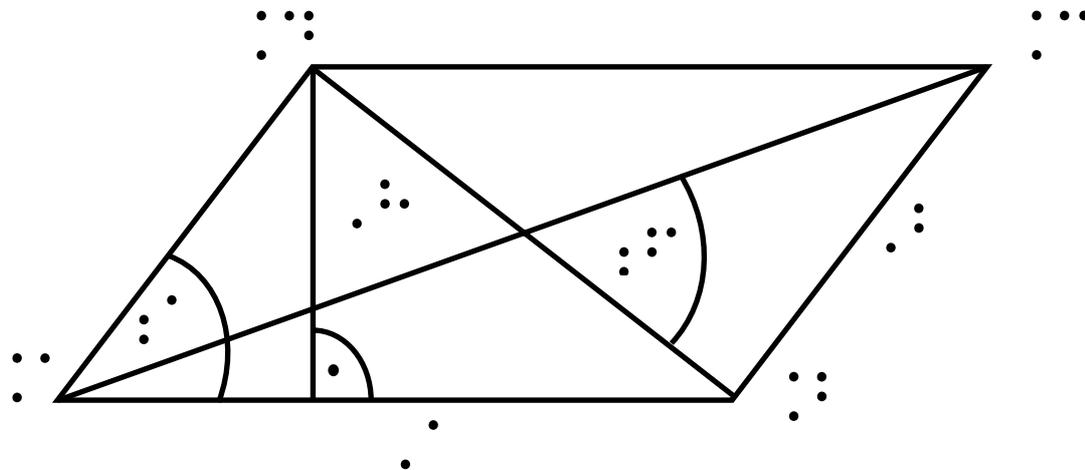


Trapez



Równoległobok

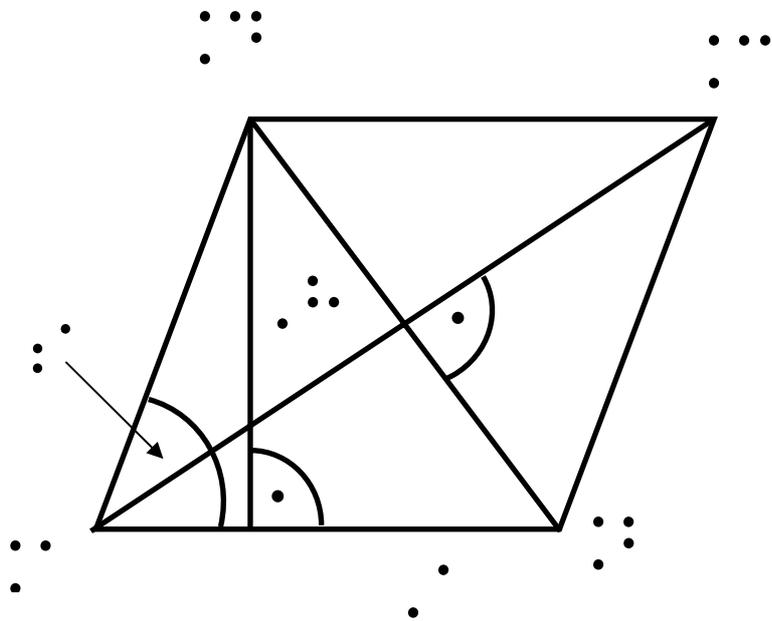
W równoległoboku przeciwległe boki są równe i równoległe. W tym równoległoboku boki AB i CD są równe i równoległe, a boki AD i BC są równe i równoległe. Kąt A jest równy kątowi C , a kąt B jest równy kątowi D . W tym równoległoboku boki AB i CD są równoległe i równe, a boki AD i BC są równoległe i równe. Kąt A jest równy kątowi C , a kąt B jest równy kątowi D .



W tym równoległoboku boki AB i CD są równoległe i równe, a boki AD i BC są równoległe i równe. Kąt A jest równy kątowi C , a kąt B jest równy kątowi D . W tym równoległoboku boki AB i CD są równoległe i równe, a boki AD i BC są równoległe i równe. Kąt A jest równy kątowi C , a kąt B jest równy kątowi D .

Romb

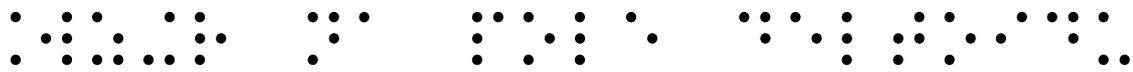
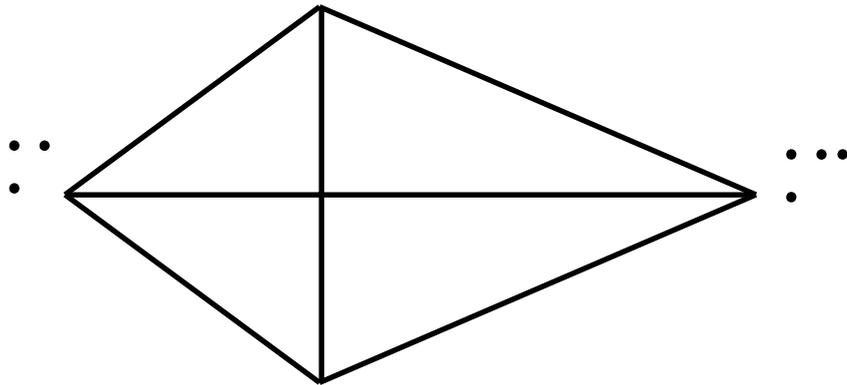
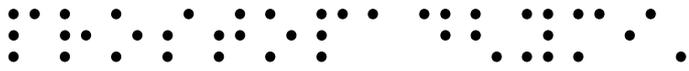
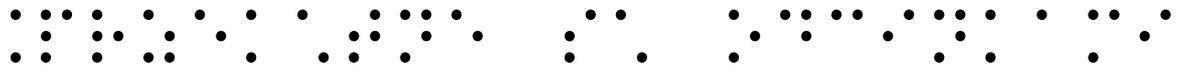
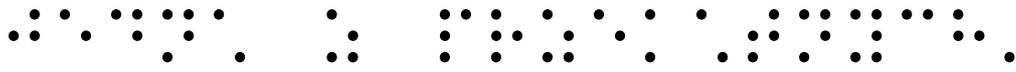
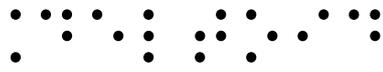
••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• •••••



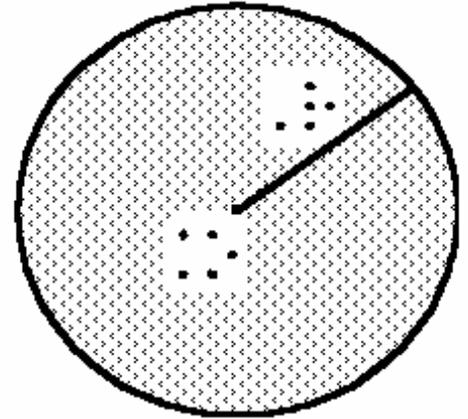
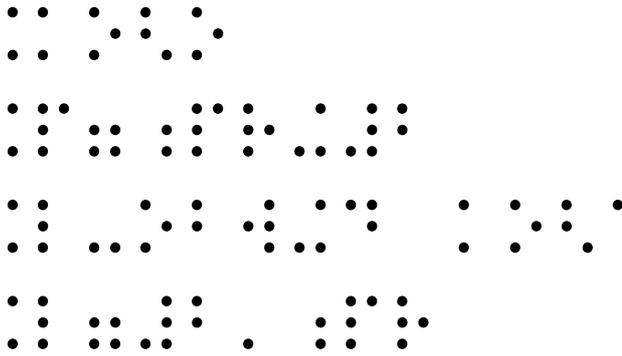
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• •••••



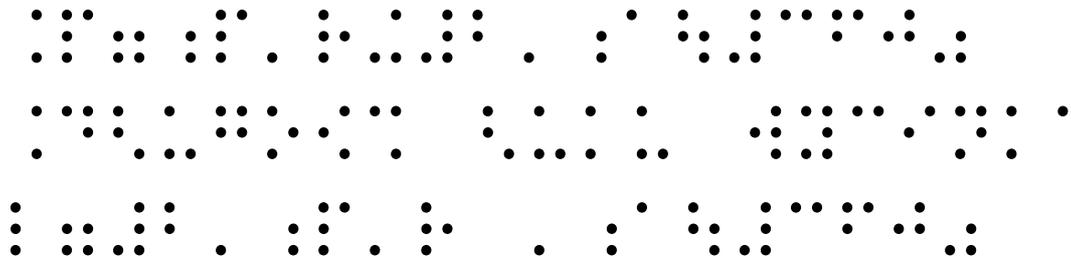
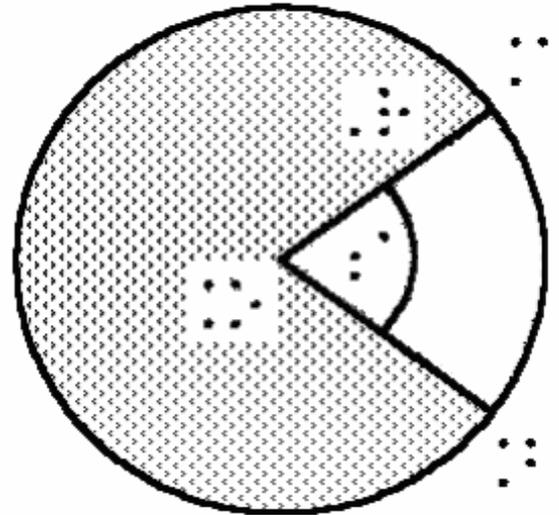
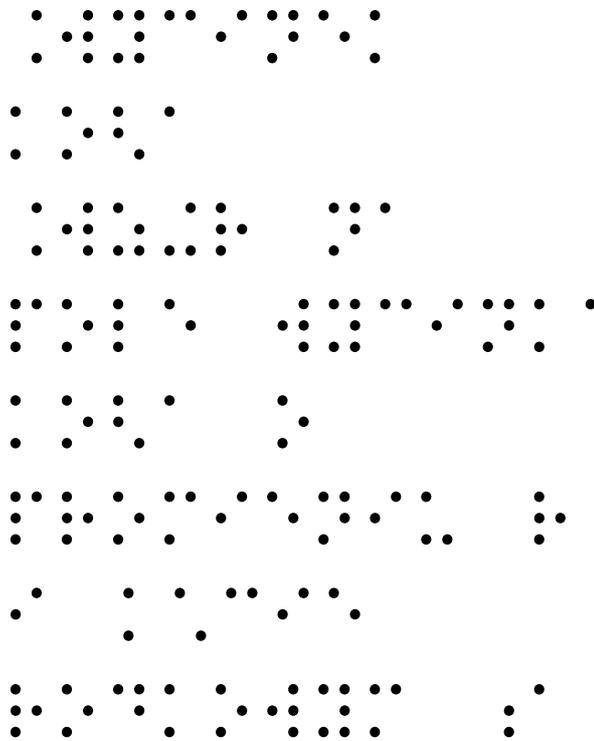
Deltoid



Koło

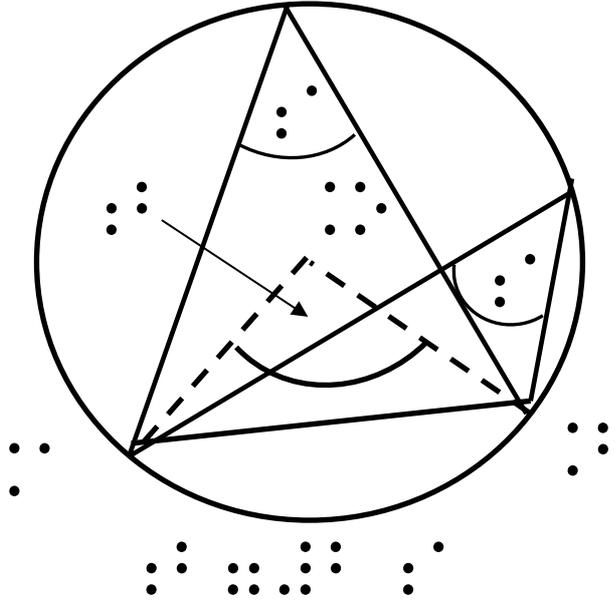


Wycinek koła



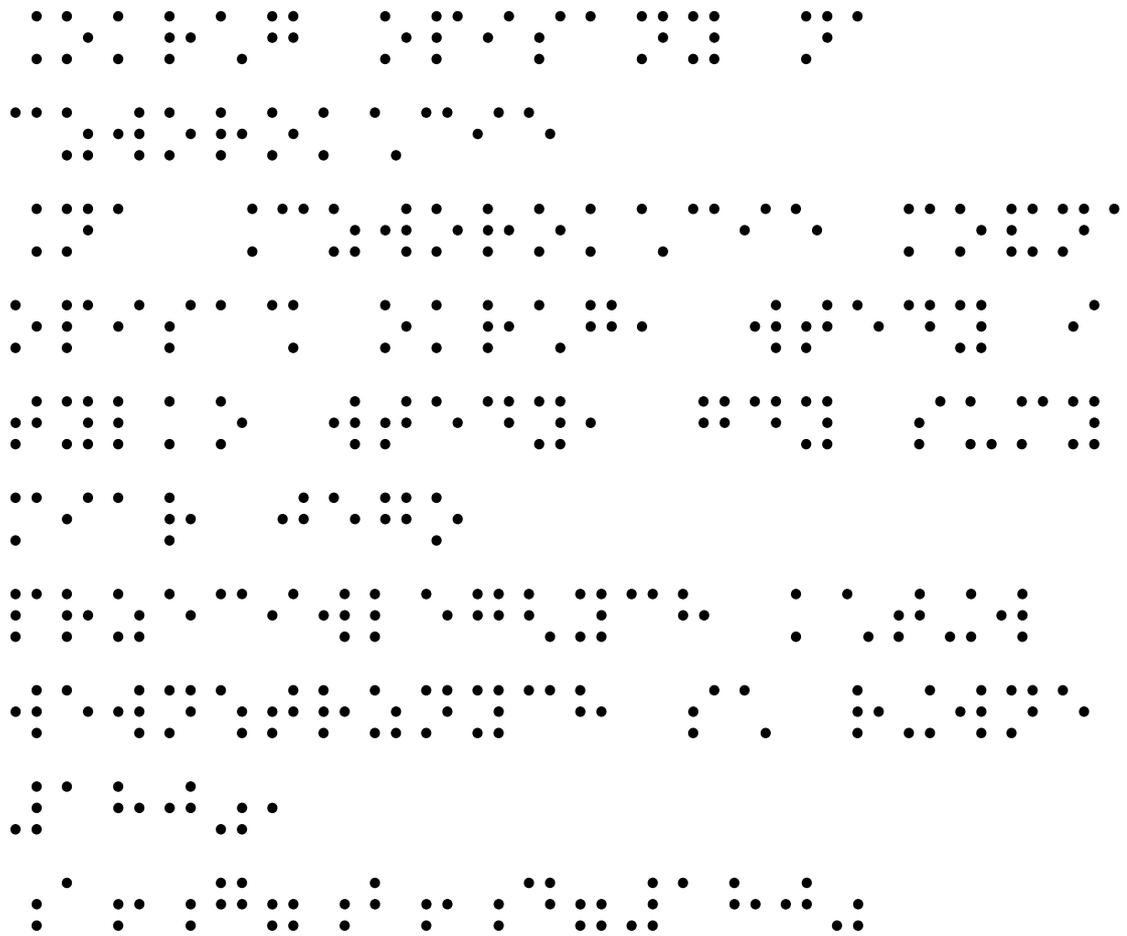
Kąty w okręgu

••• ••••• ••• ••• ••••• •••••
••••• ••••• ••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••• ••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••

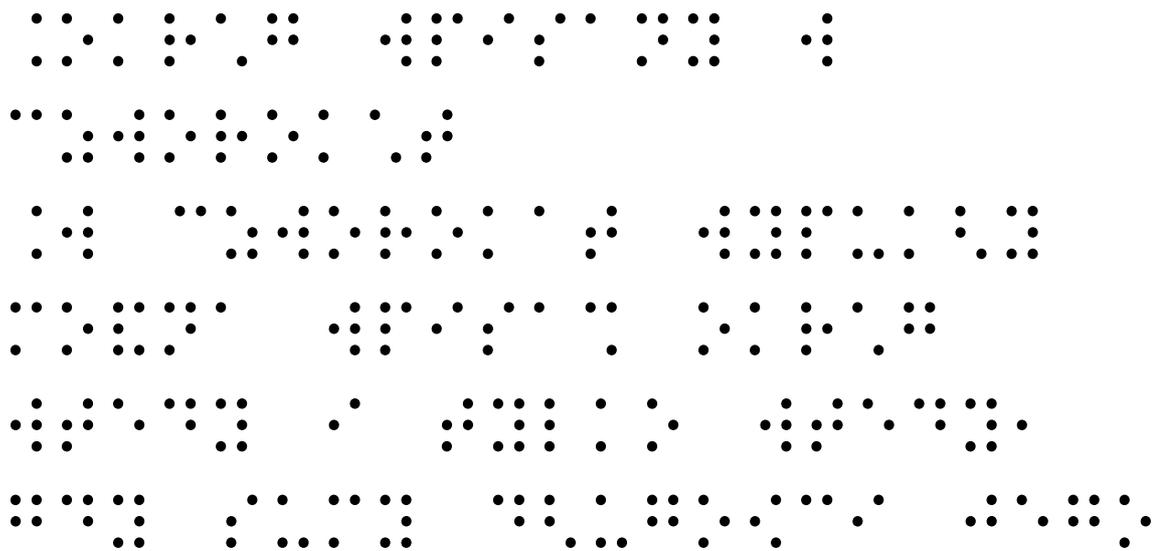


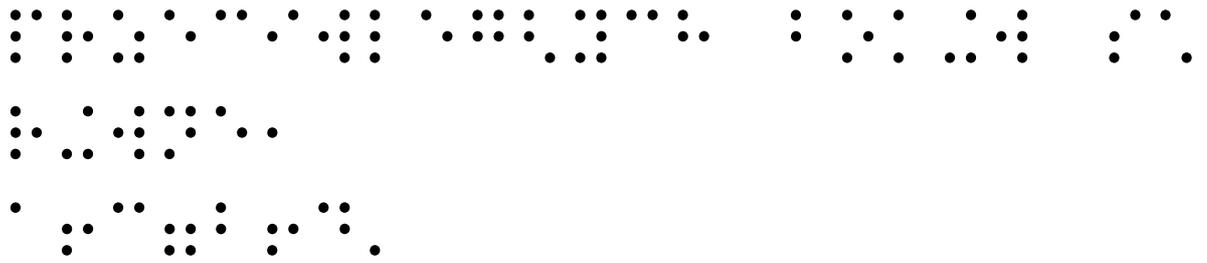
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••• ••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••
••• ••••• ••••• ••••• ••••• •••••

Okrag opisany na czworokacie

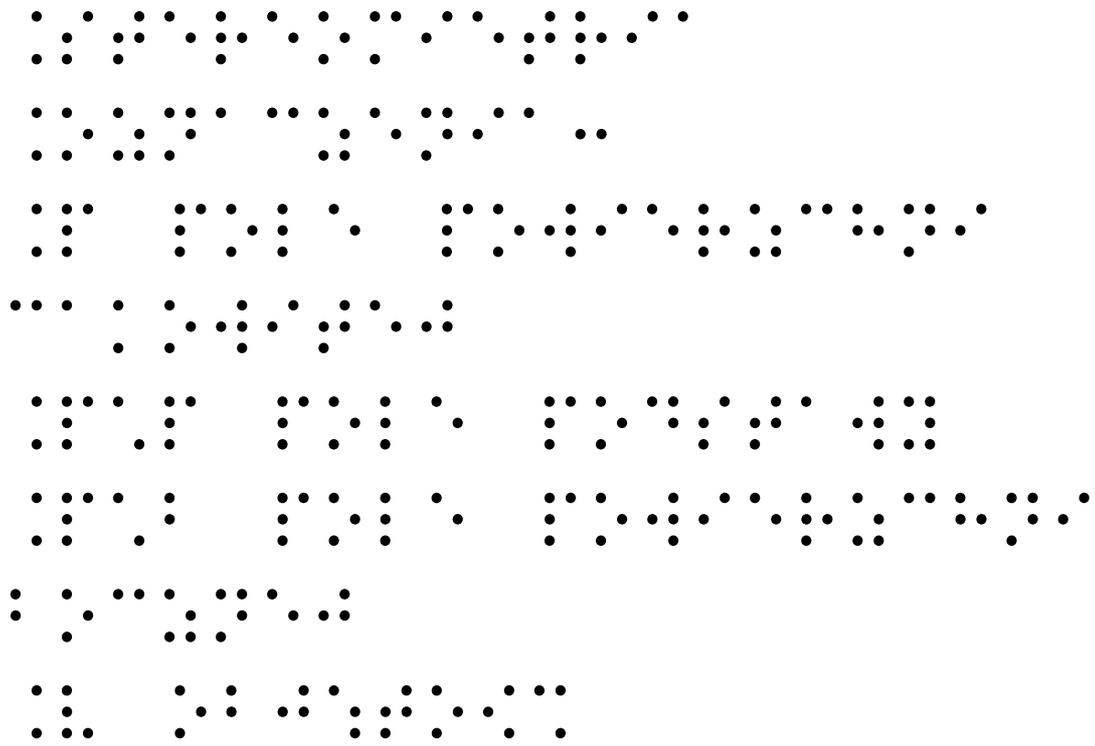


Okrag wpisany w czworokat

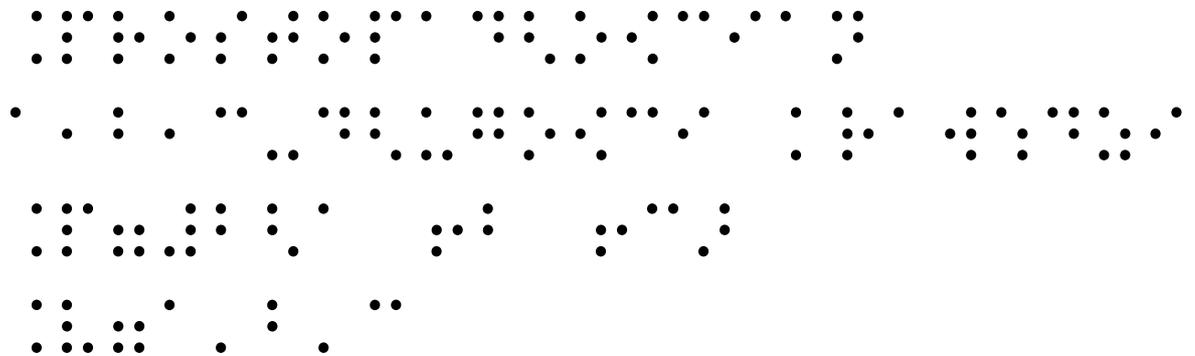




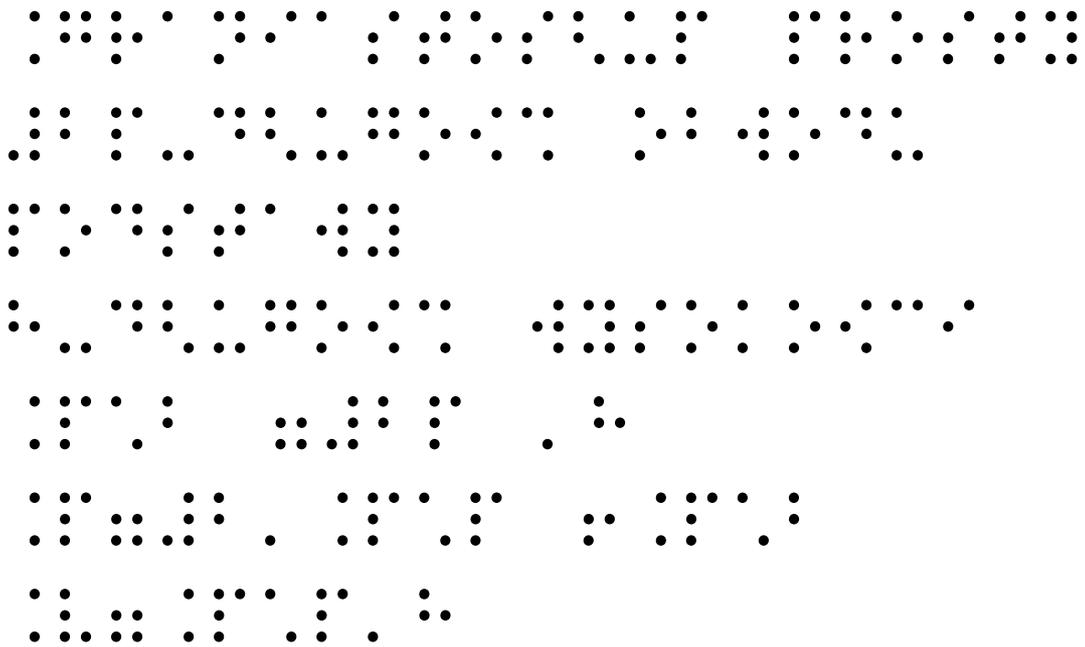
Stereometria



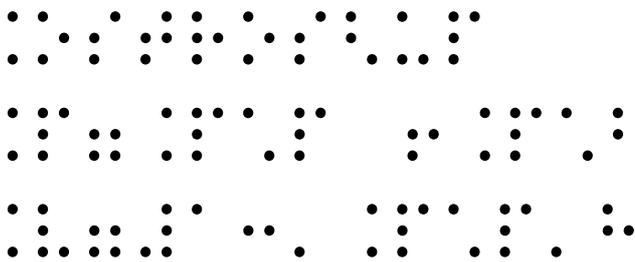
Prostopadłościan



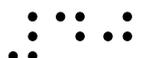
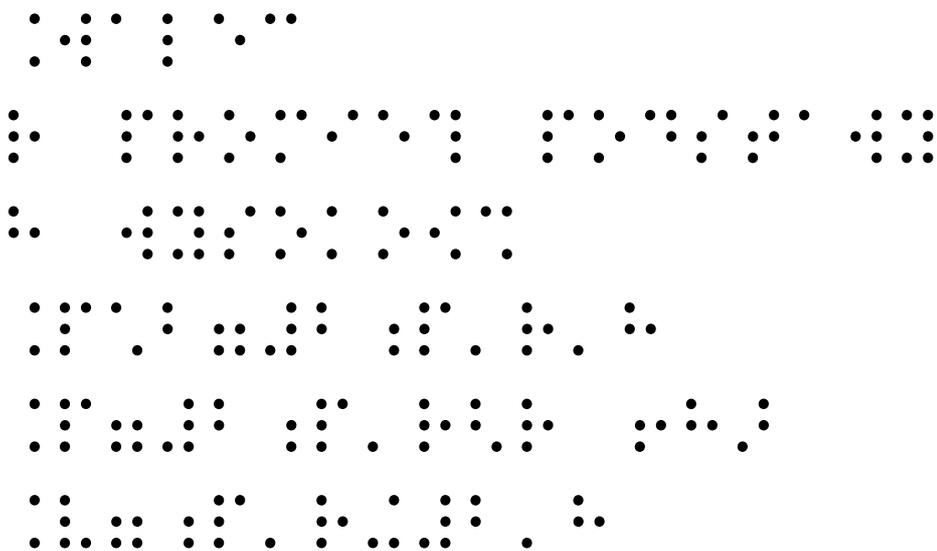
Graniastosłup prosty



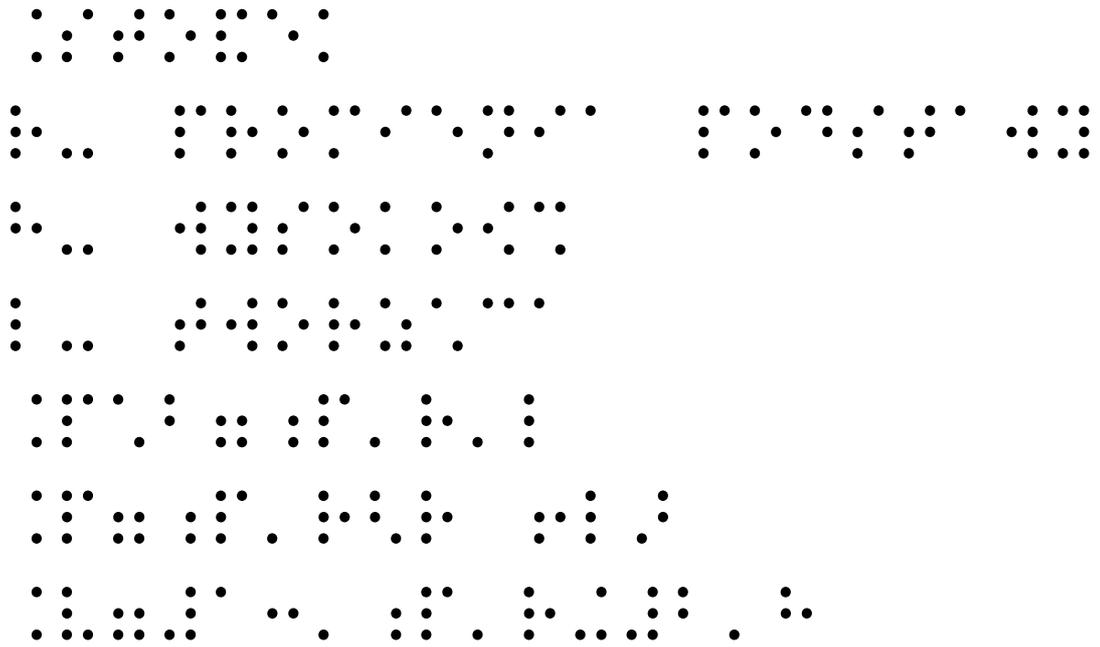
Ostrosłup



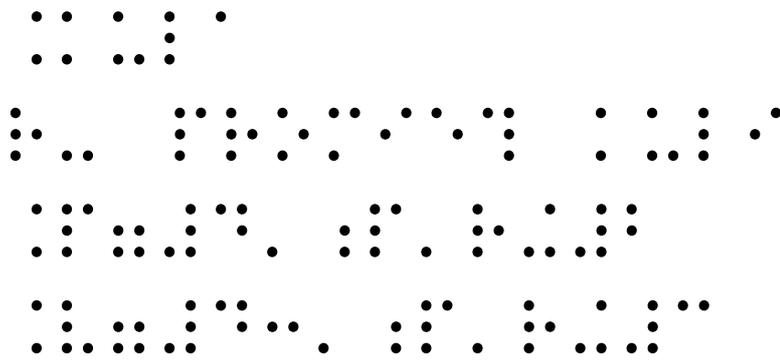
Walec



Stożek



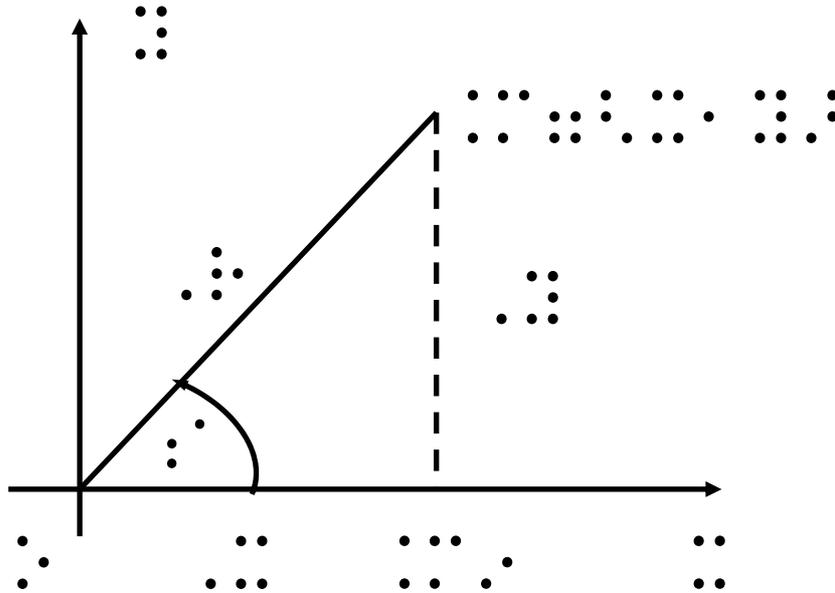
Kula



Trygonometria

Definicje funkcji trygonometrycznych

W trójkącie prostokątnym o kącie α przy wierzchołku O mamy:



Definicje funkcji trygonometrycznych:

sin α = przeciwprostokątna / przeciwprostokątna

cos α = przyległa / przeciwprostokątna

tg α = przeciwprostokątna / przyległa

ctg α = przyległa / przeciwprostokątna

sin α = przeciwprostokątna / przeciwprostokątna

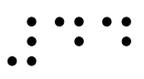
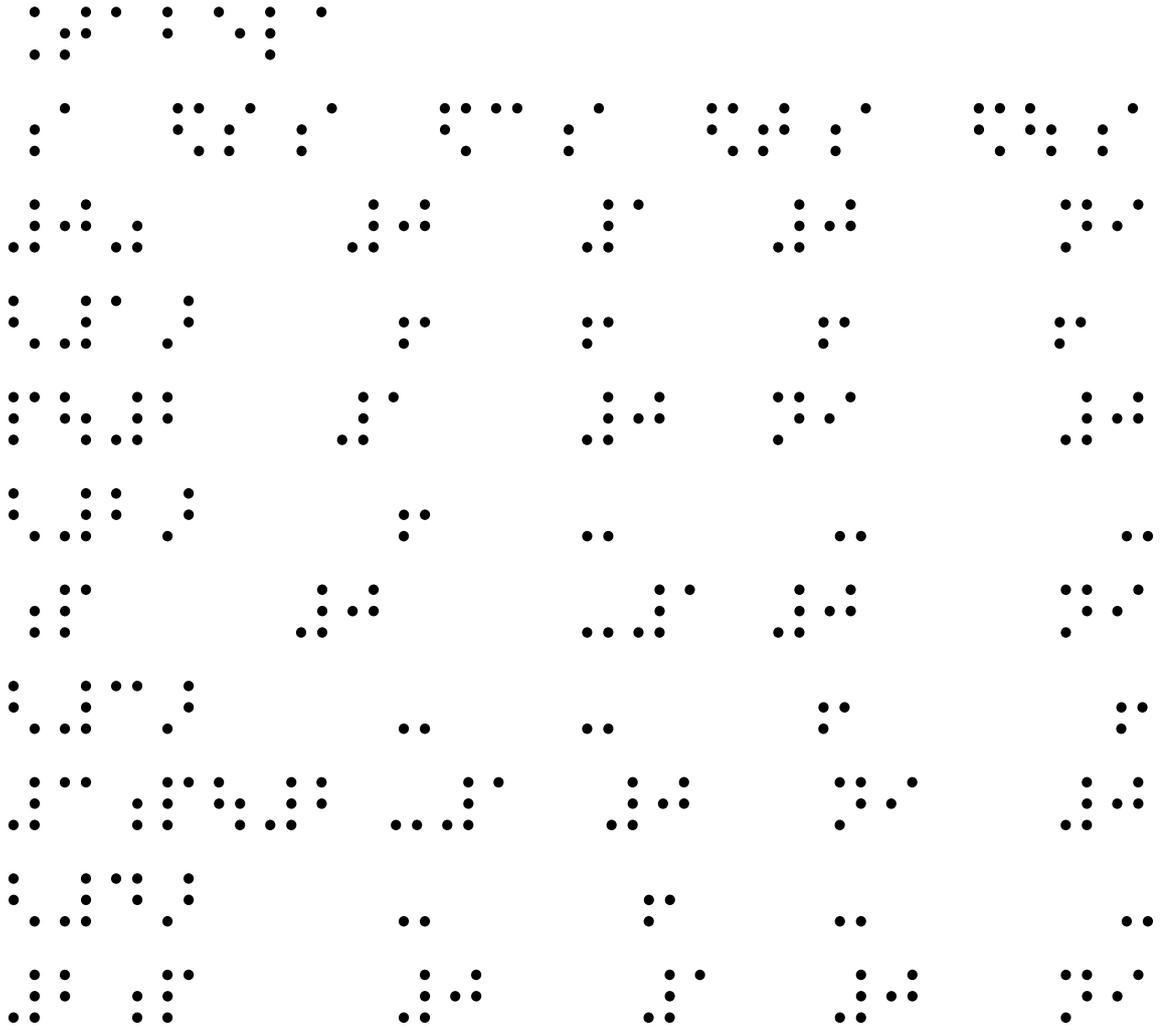
cos α = przyległa / przeciwprostokątna

tg α = przeciwprostokątna / przyległa

ctg α = przyległa / przeciwprostokątna

Wartości funkcji trygonometrycznych , gdy $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\csc \alpha$
$\sin 0$	$\cos 0$	$\tan 0$	$\cot 0$	$\sec 0$	$\csc 0$
$\sin \frac{\pi}{6}$	$\cos \frac{\pi}{6}$	$\tan \frac{\pi}{6}$	$\cot \frac{\pi}{6}$	$\sec \frac{\pi}{6}$	$\csc \frac{\pi}{6}$
$\sin \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\tan \frac{\pi}{4}$	$\cot \frac{\pi}{4}$	$\sec \frac{\pi}{4}$	$\csc \frac{\pi}{4}$
$\sin \frac{\pi}{3}$	$\cos \frac{\pi}{3}$	$\tan \frac{\pi}{3}$	$\cot \frac{\pi}{3}$	$\sec \frac{\pi}{3}$	$\csc \frac{\pi}{3}$
$\sin \frac{\pi}{2}$	$\cos \frac{\pi}{2}$	$\tan \frac{\pi}{2}$	$\cot \frac{\pi}{2}$	$\sec \frac{\pi}{2}$	$\csc \frac{\pi}{2}$
$\sin \frac{2\pi}{3}$	$\cos \frac{2\pi}{3}$	$\tan \frac{2\pi}{3}$	$\cot \frac{2\pi}{3}$	$\sec \frac{2\pi}{3}$	$\csc \frac{2\pi}{3}$
$\sin \frac{3\pi}{4}$	$\cos \frac{3\pi}{4}$	$\tan \frac{3\pi}{4}$	$\cot \frac{3\pi}{4}$	$\sec \frac{3\pi}{4}$	$\csc \frac{3\pi}{4}$
$\sin \frac{5\pi}{6}$	$\cos \frac{5\pi}{6}$	$\tan \frac{5\pi}{6}$	$\cot \frac{5\pi}{6}$	$\sec \frac{5\pi}{6}$	$\csc \frac{5\pi}{6}$
$\sin \pi$	$\cos \pi$	$\tan \pi$	$\cot \pi$	$\sec \pi$	$\csc \pi$
$\sin \frac{7\pi}{6}$	$\cos \frac{7\pi}{6}$	$\tan \frac{7\pi}{6}$	$\cot \frac{7\pi}{6}$	$\sec \frac{7\pi}{6}$	$\csc \frac{7\pi}{6}$
$\sin \frac{5\pi}{4}$	$\cos \frac{5\pi}{4}$	$\tan \frac{5\pi}{4}$	$\cot \frac{5\pi}{4}$	$\sec \frac{5\pi}{4}$	$\csc \frac{5\pi}{4}$
$\sin \frac{3\pi}{2}$	$\cos \frac{3\pi}{2}$	$\tan \frac{3\pi}{2}$	$\cot \frac{3\pi}{2}$	$\sec \frac{3\pi}{2}$	$\csc \frac{3\pi}{2}$
$\sin \frac{7\pi}{3}$	$\cos \frac{7\pi}{3}$	$\tan \frac{7\pi}{3}$	$\cot \frac{7\pi}{3}$	$\sec \frac{7\pi}{3}$	$\csc \frac{7\pi}{3}$
$\sin 2\pi$	$\cos 2\pi$	$\tan 2\pi$	$\cot 2\pi$	$\sec 2\pi$	$\csc 2\pi$



Związki między funkcjami trygonometrycznymi

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) &= \sin^2\alpha - \sin^2\beta \\ \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) &= \cos^2\alpha - \sin^2\beta \\ \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta \\ \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\alpha - \sin\beta \cos\beta \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2\sin\alpha \cos\beta \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha \cos\beta \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2\sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta \\ \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\alpha - \sin\beta \cos\beta \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2\sin\alpha \cos\beta \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2\cos\alpha \cos\beta \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2\sin\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych (30° , 45° , 60°)

$\sin 30^\circ$	$\sin 45^\circ$	$\sin 60^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\cos 45^\circ$	$\cos 60^\circ$	$\tan 30^\circ$	$\tan 45^\circ$	$\tan 60^\circ$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\sin 15^\circ$	$\sin 75^\circ$	$\sin 15^\circ$	$\sin 75^\circ$	$\cos 15^\circ$	$\cos 75^\circ$	$\cos 15^\circ$	$\cos 75^\circ$	$\tan 15^\circ$	$\tan 75^\circ$
$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$

Wzory redukcyjne

$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\cos(\alpha \pm \beta)$	$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\cos(\alpha \pm \beta)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$
 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
 $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
 $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

Funkcje sumy i różnicy kątów

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$
 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$
 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$
 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
 $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
 $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$

Funkcje podwojonego kąta

The image displays a comprehensive set of mathematical formulas for double angle functions, rendered in Braille. The formulas are organized into a grid with 20 rows and approximately 100 columns. The content includes:

- Trigonometric identities for sine, cosine, tangent, and cotangent of double angles.
- Identities for secant and cosecant of double angles.
- Formulas for the square of sine and cosine of double angles.
- Formulas for the square of tangent and cotangent of double angles.
- Formulas for the sum and difference of sines and cosines.
- Formulas for the sum and difference of tangents.

The Braille is presented in a clear, structured layout, facilitating the learning and reference of these mathematical concepts.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

Funkcje kąta potrojonego

$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$

$\sin \frac{3\alpha}{2} = \frac{3\sin \alpha - 4\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{2}$

$\cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{4\cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3\cos \alpha}{2}$

$\sin \frac{3\alpha}{2} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{2} - 4\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{2}$

$\cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{4\cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3\cos \frac{\alpha}{2}}{2}$

$\sin \frac{3\alpha}{2} = \frac{3\sin \frac{\alpha}{2} - 4\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{2}$

$\cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{4\cos^3 \frac{\alpha}{2} - 3\cos \frac{\alpha}{2}}{2}$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos \alpha \pm \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos \alpha \pm \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$

Wariacje z powtórzeniami

Braille representation of the title "Wariacje z powtórzeniami" and its corresponding mathematical formula. The formula is $\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$, which represents the sum of all possible products of length n from a set of n elements, allowing for repetition. The Braille consists of several lines of code representing the title and the nested summation structure of the formula.

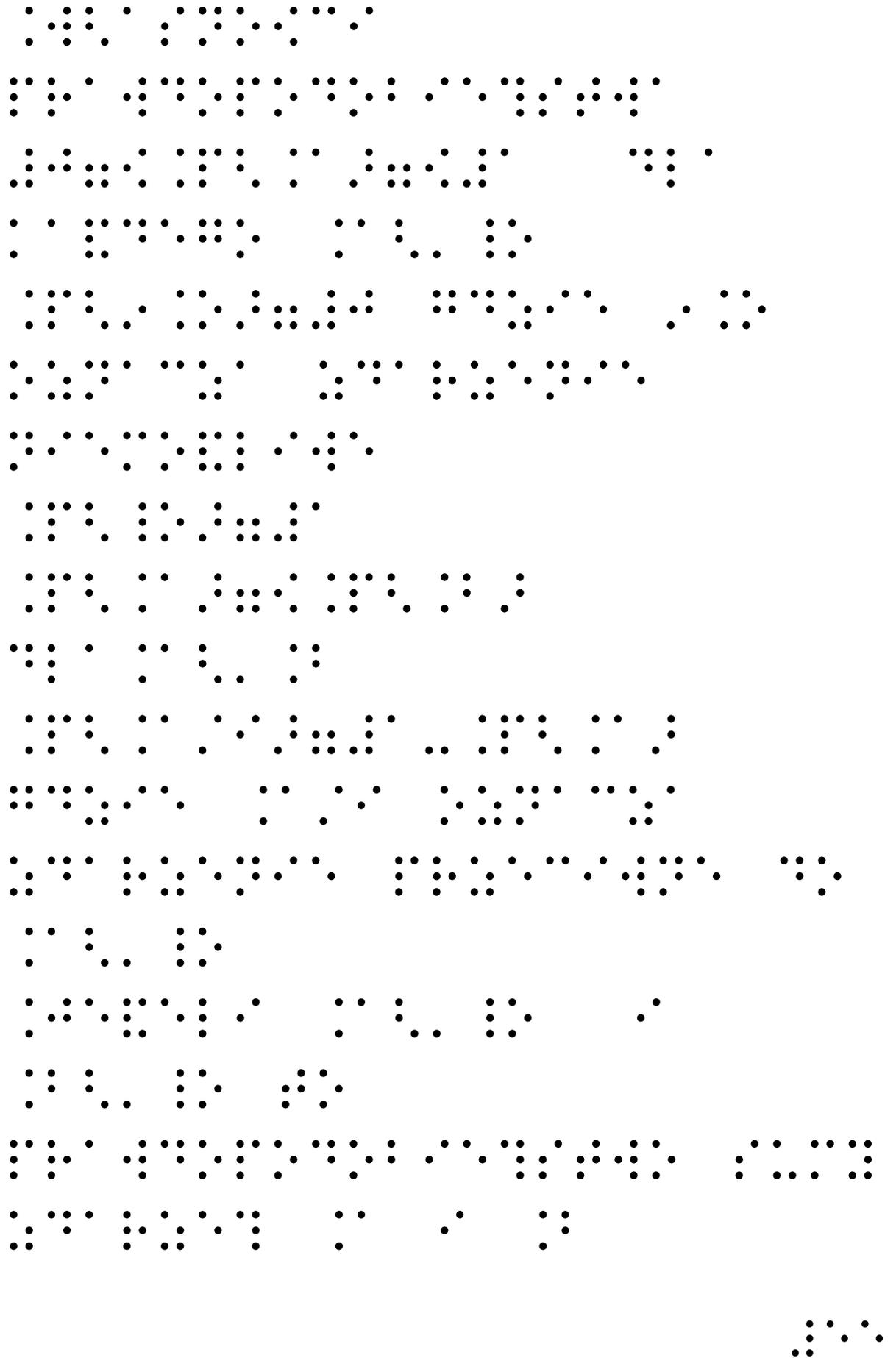
Rachunek prawdopodobieństwa

Braille representation of the title "Rachunek prawdopodobieństwa" and a mathematical formula. The formula is $\sum_{i=1}^n x_i$, representing a simple summation. The Braille consists of two lines of code representing the title and the summation.

Klasyczna definicja

Braille representation of the title "Klasyczna definicja" and a complex mathematical formula. The formula is $\sum_{i=1}^n x_i^2$, representing the sum of squares. The Braille consists of four lines of code representing the title and the formula.

Własności prawdopodobieństwa



Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby

Zdarzenia niezależne

Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby
Przebieg choroby

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \dots$

Twierdzenie Bernoullego

$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < \dots$

1. Wzrost i waga ciała
 2. Ciężar ciała
 3. Ciężar ciała
 4. Ciężar ciała
 5. Ciężar ciała
 6. Ciężar ciała
 7. Ciężar ciała
 8. Ciężar ciała

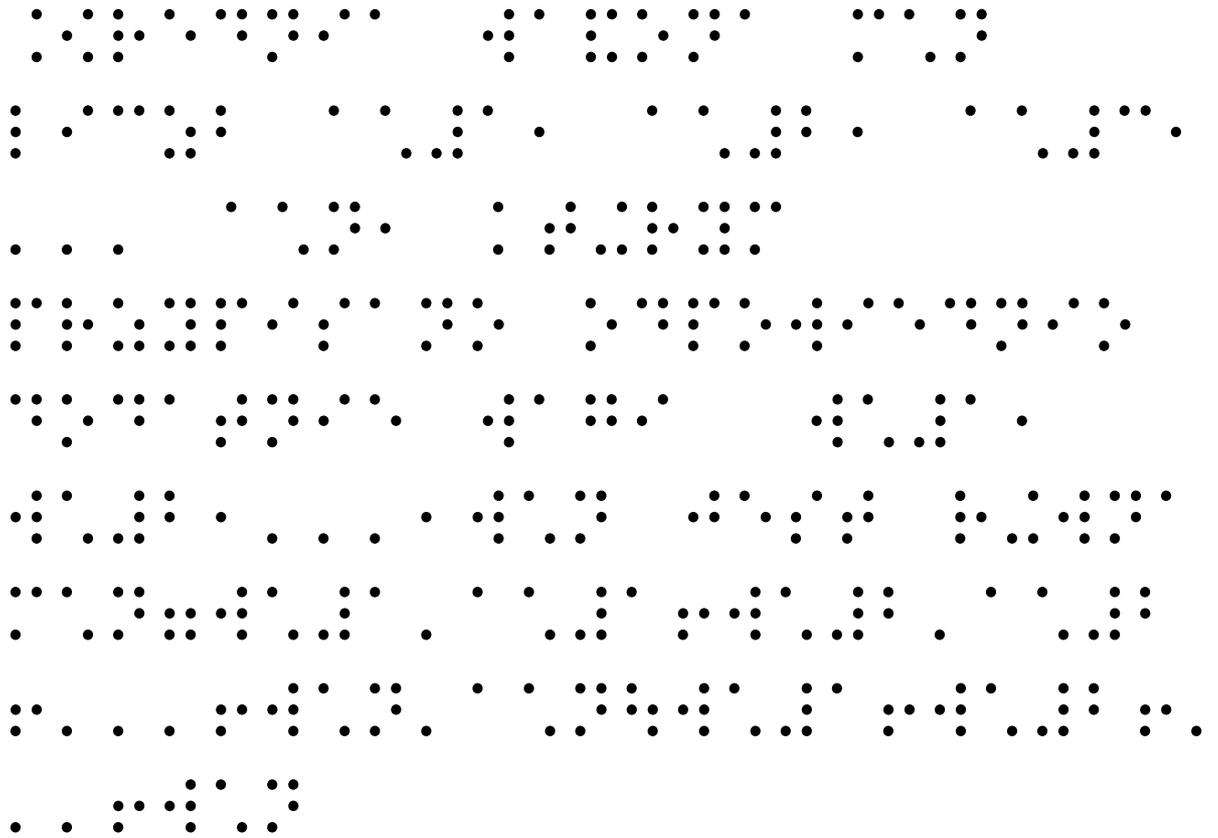
Parametry danych statystycznych

1. Ciężar ciała
 2. Ciężar ciała
 3. Ciężar ciała
 4. Ciężar ciała
 5. Ciężar ciała
 6. Ciężar ciała
 7. Ciężar ciała
 8. Ciężar ciała

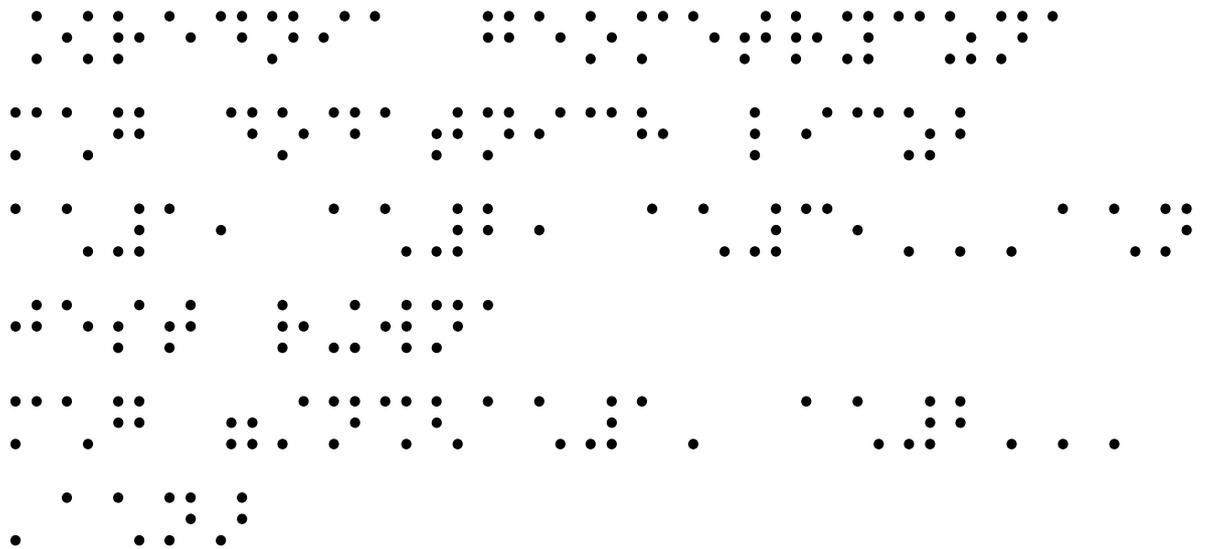
Średnia arytmetyczna

1. Ciężar ciała
 2. Ciężar ciała
 3. Ciężar ciała
 4. Ciężar ciała
 5. Ciężar ciała
 6. Ciężar ciała
 7. Ciężar ciała
 8. Ciężar ciała

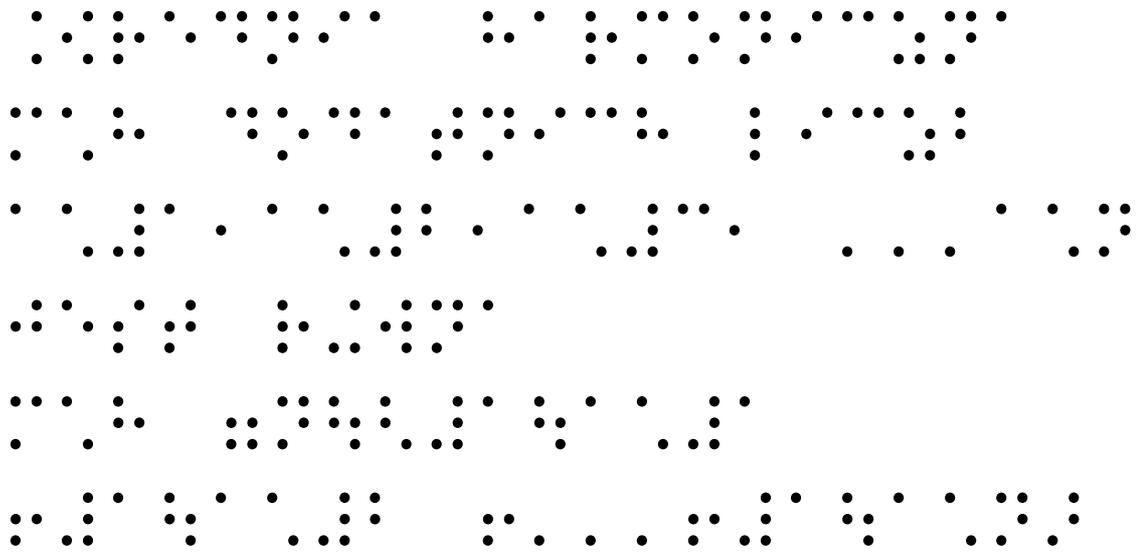
Średnia ważona



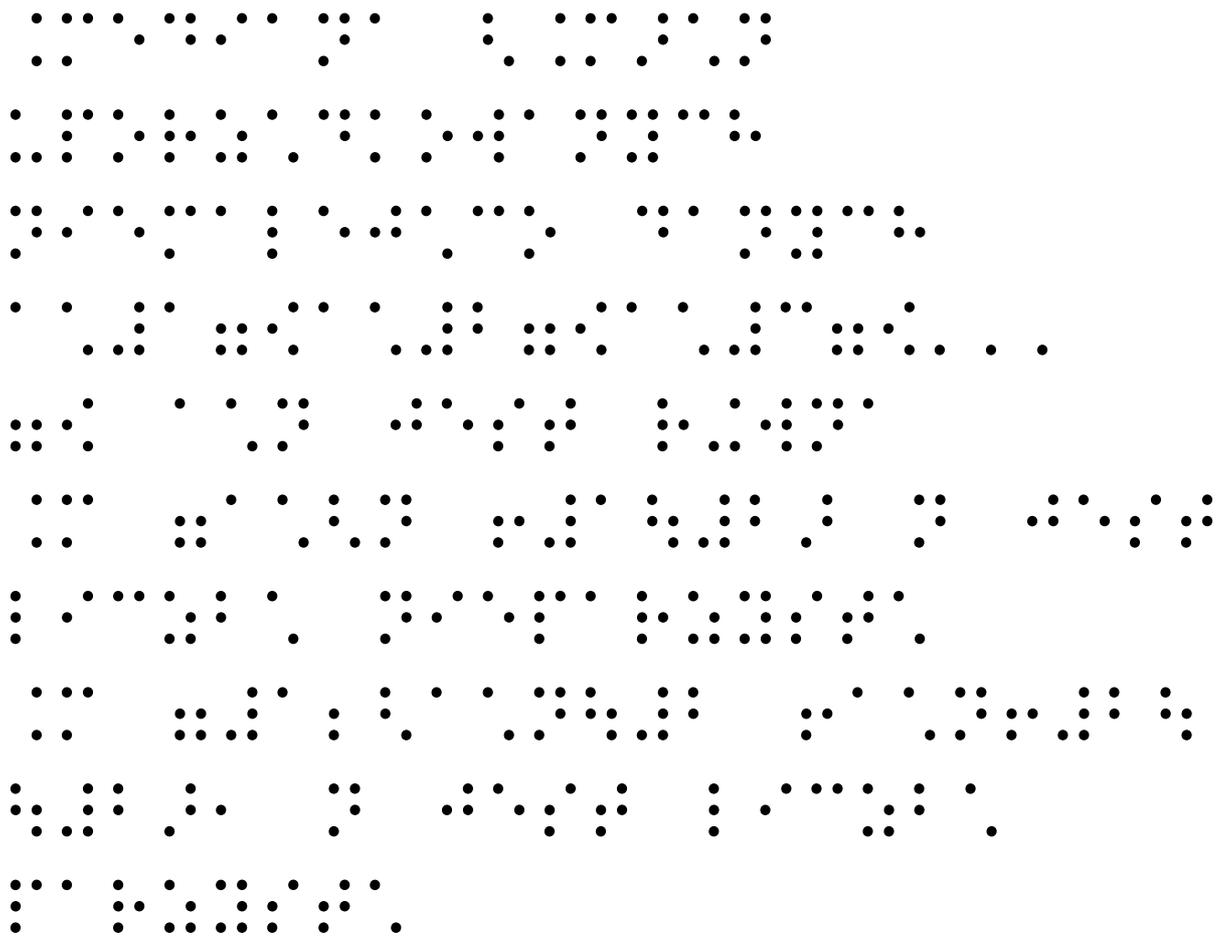
Średnia geometryczna



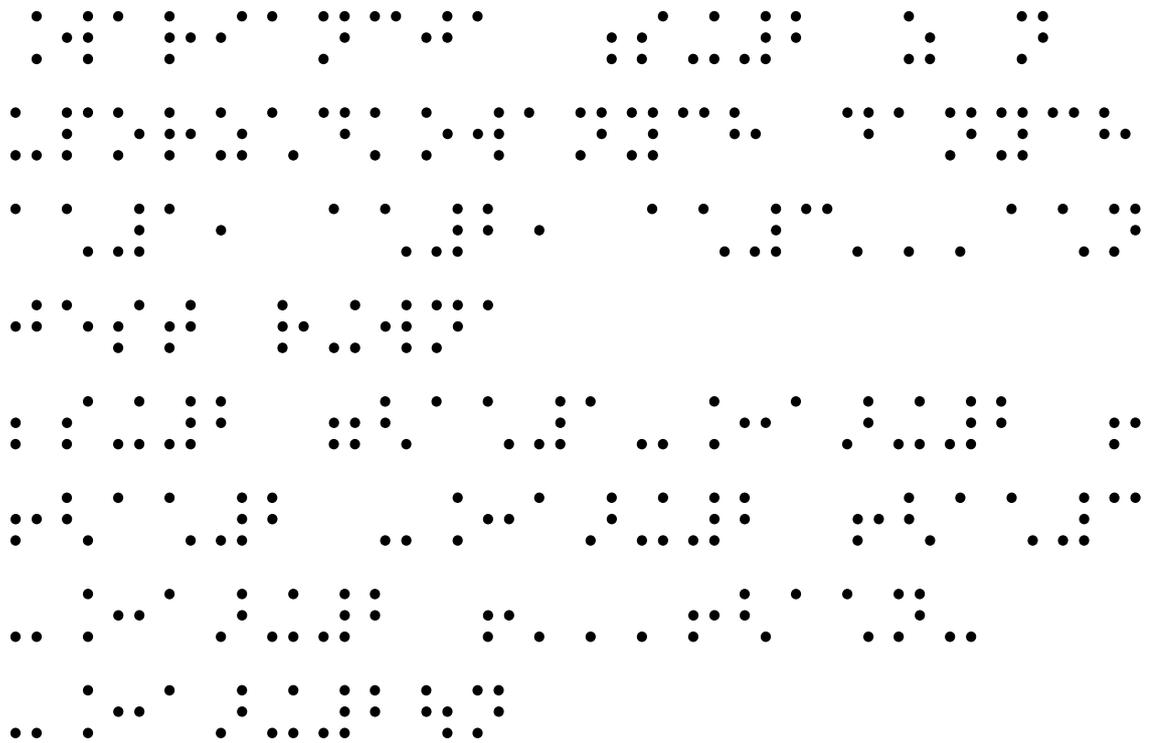
Średnia harmoniczna



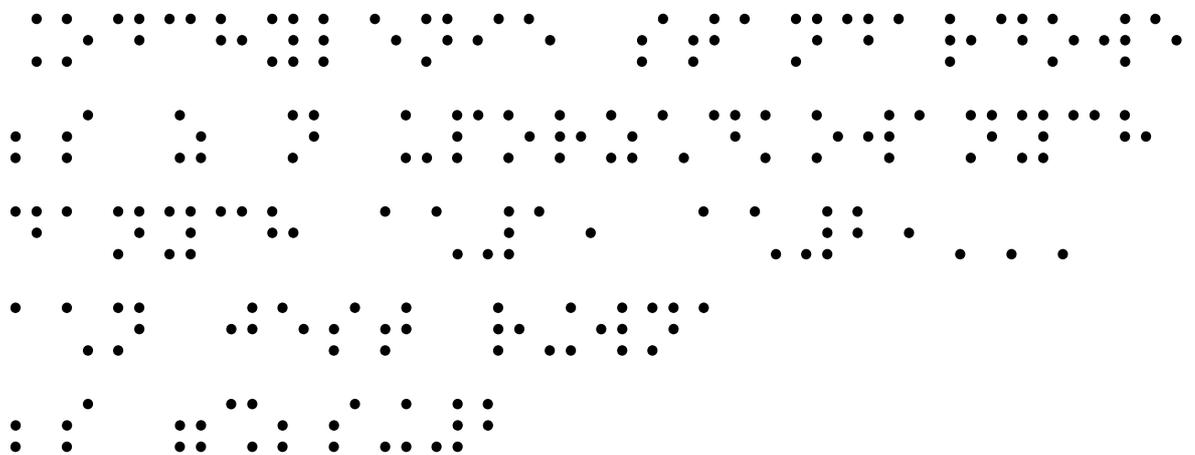
Mediana



Wariancja



Odchylenie standardowe



TABLICA FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

Trigonometric function values represented in Braille notation.

Column 1 of trigonometric function values in Braille.

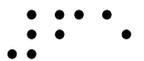
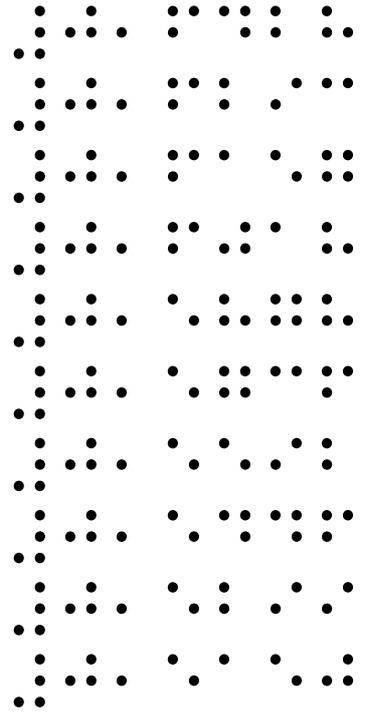
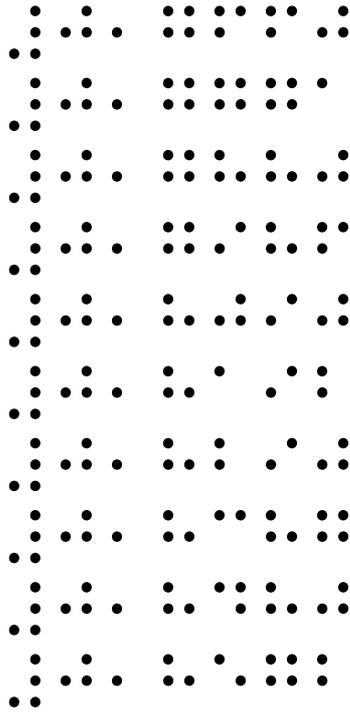
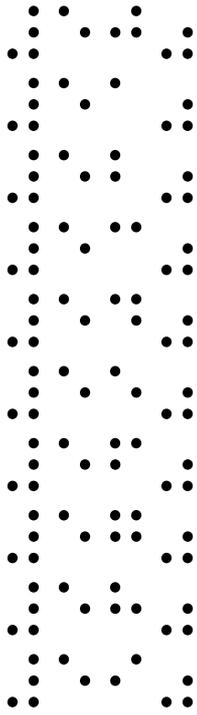
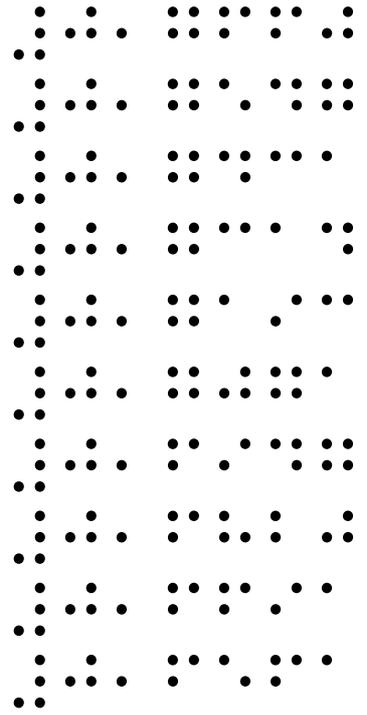
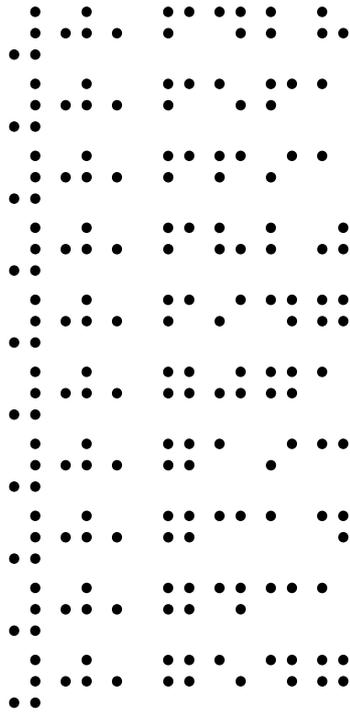
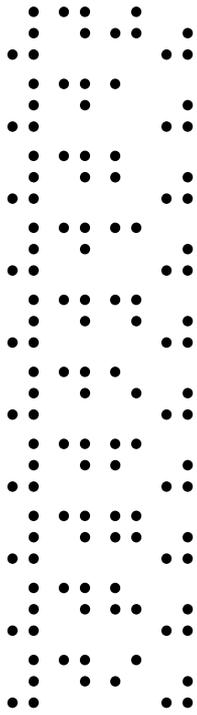
Column 2 of trigonometric function values in Braille.

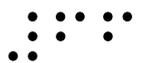
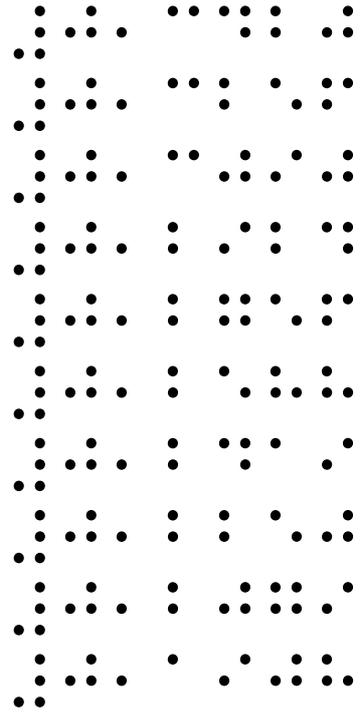
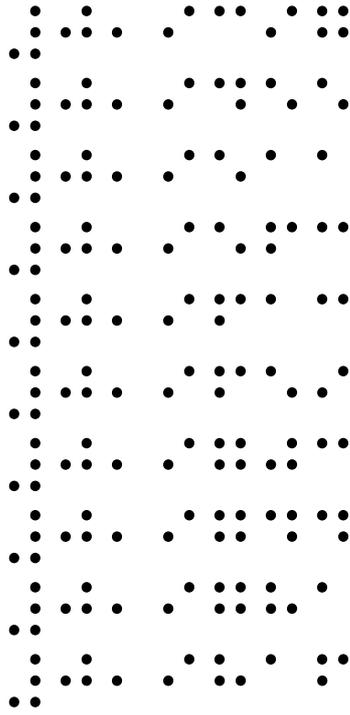
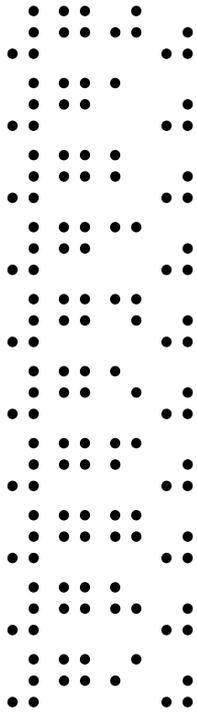
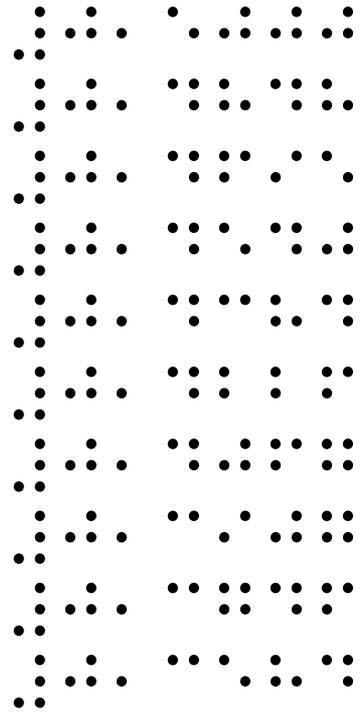
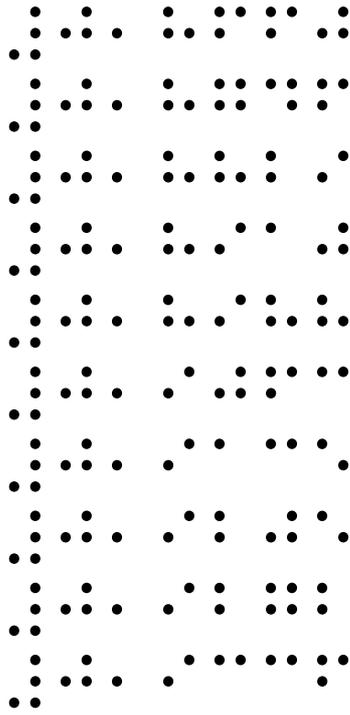
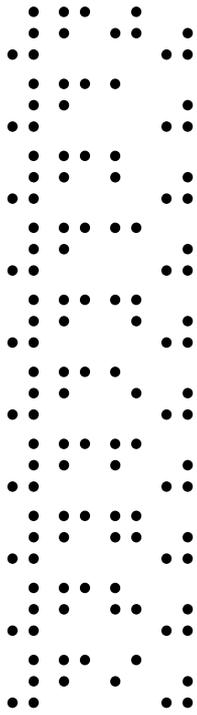
Column 3 of trigonometric function values in Braille.

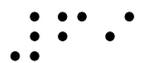
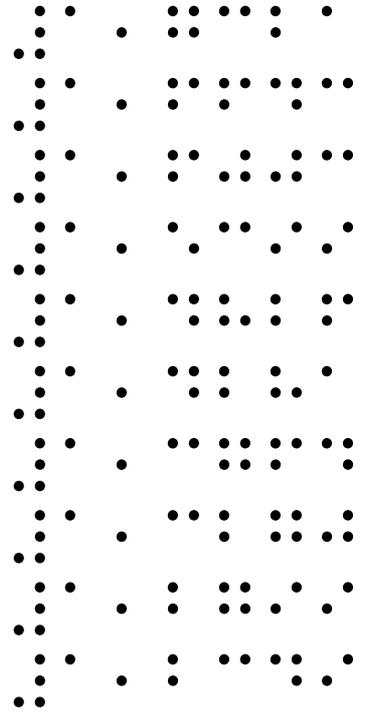
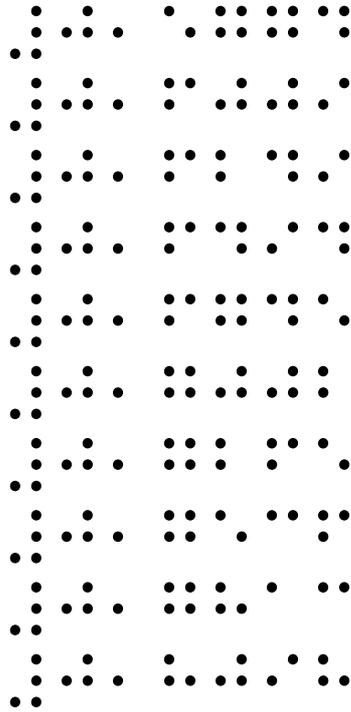
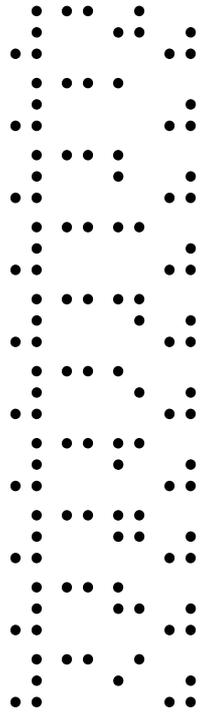
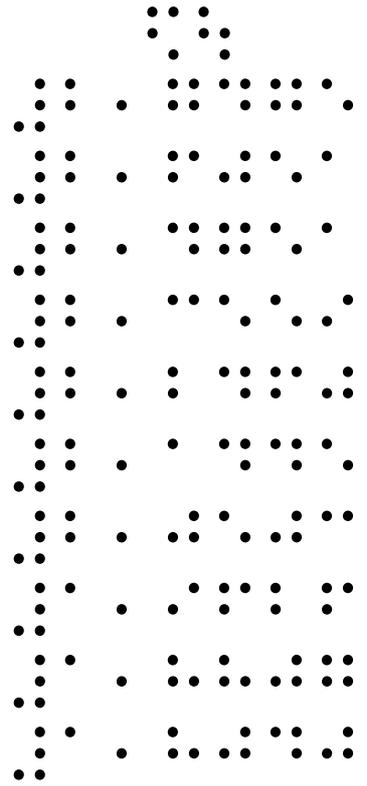
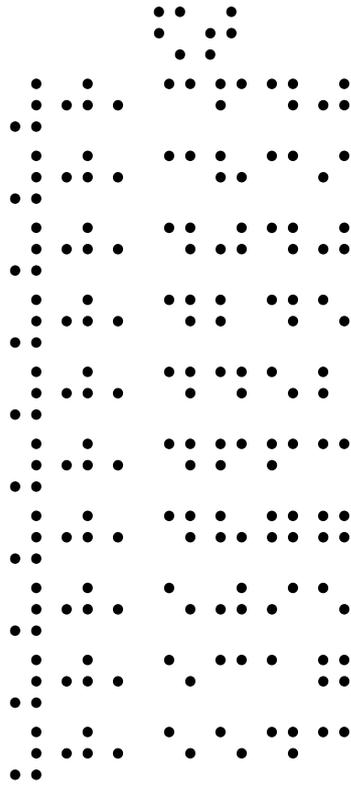
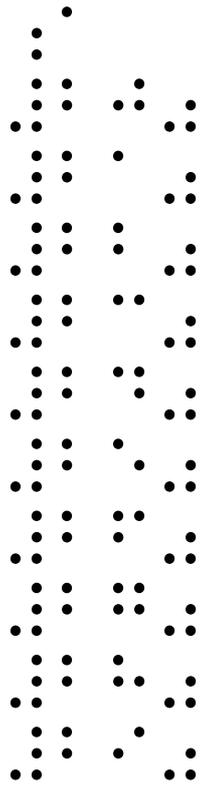
Column 4 of trigonometric function values in Braille.

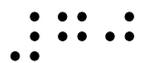
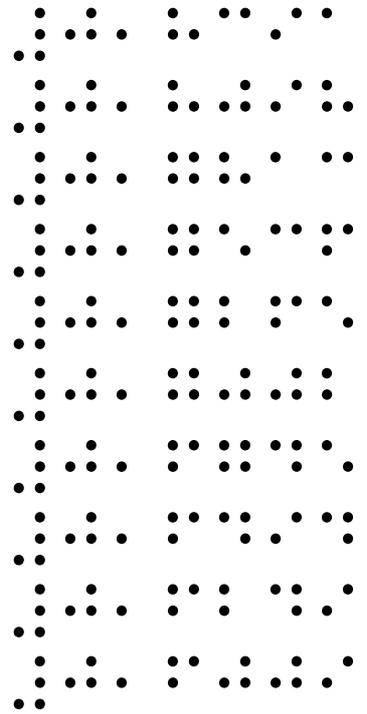
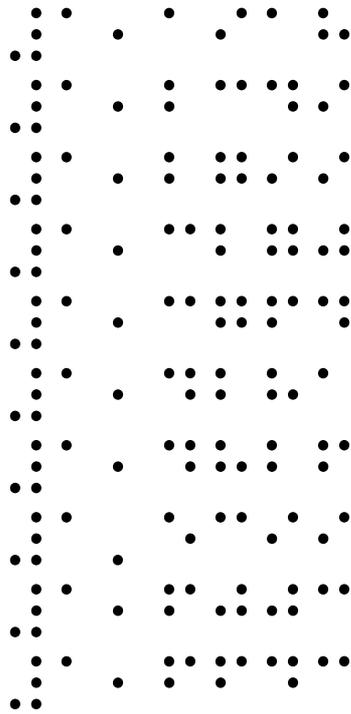
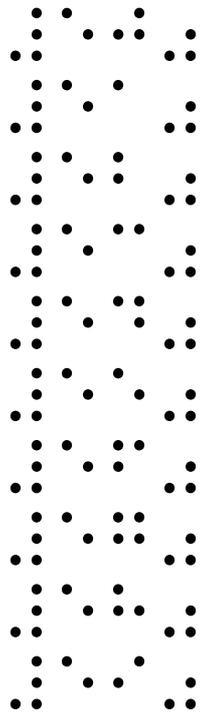
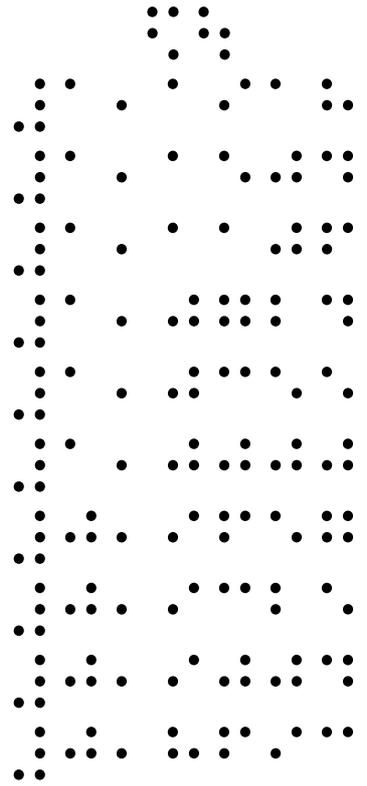
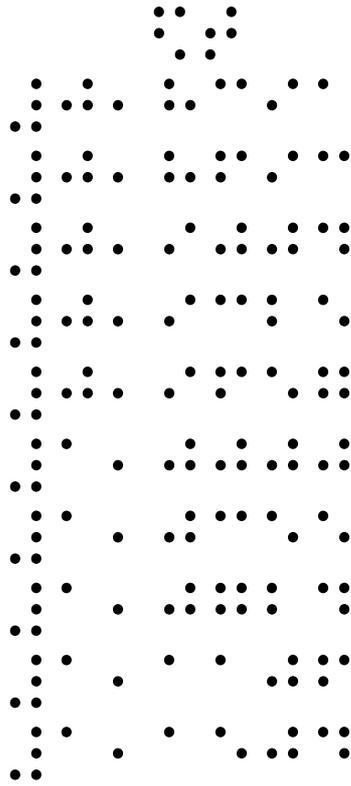
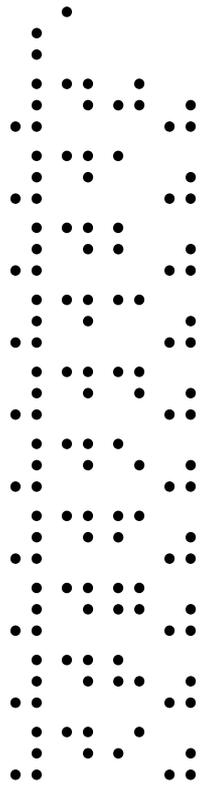
Column 5 of trigonometric function values in Braille.

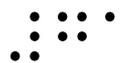
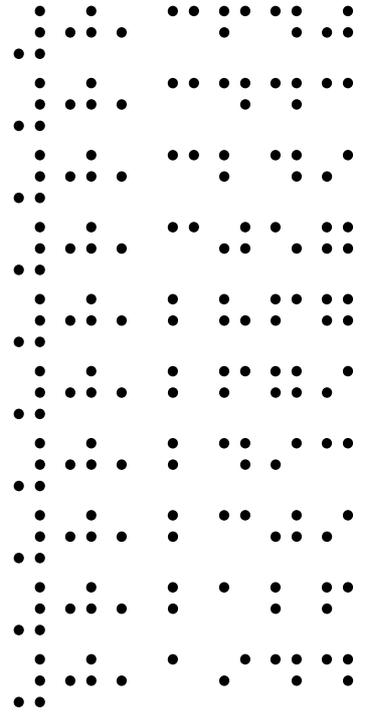
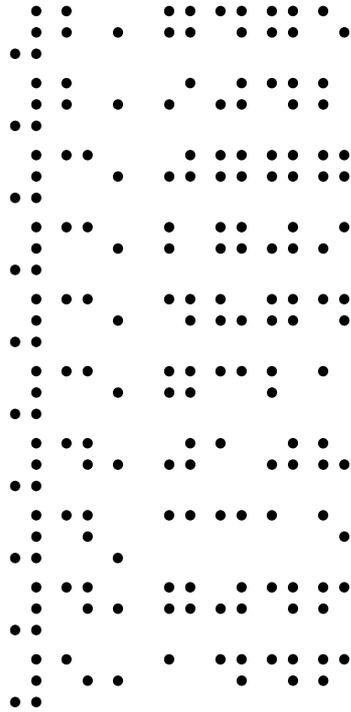
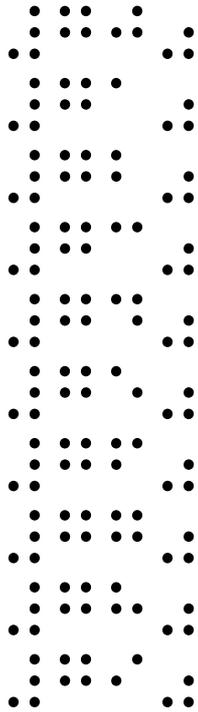
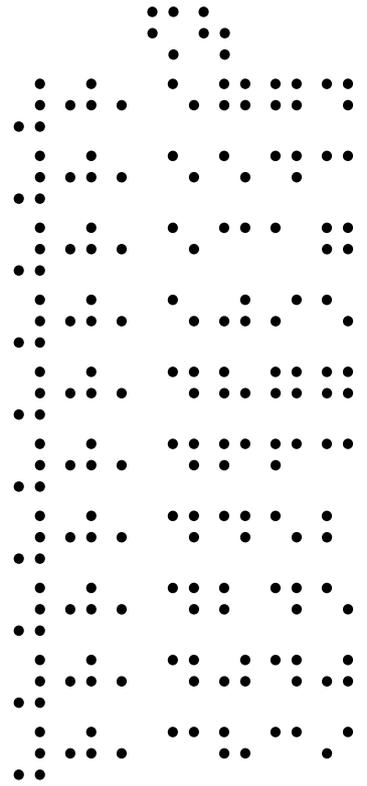
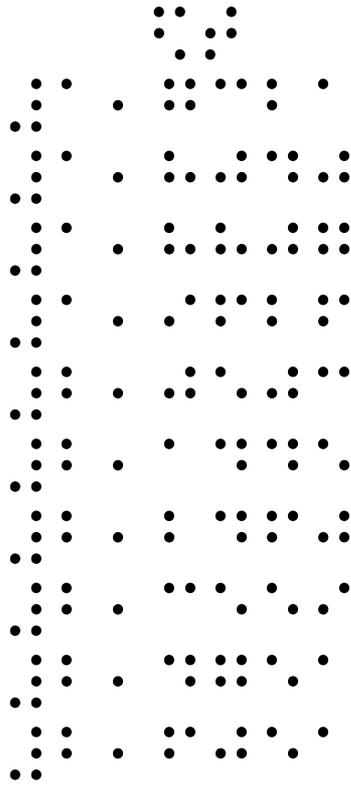
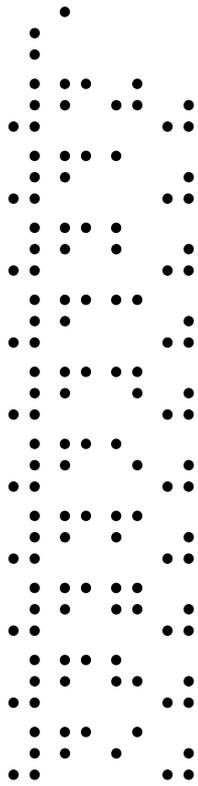
Column 6 of trigonometric function values in Braille.

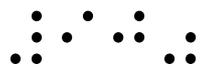
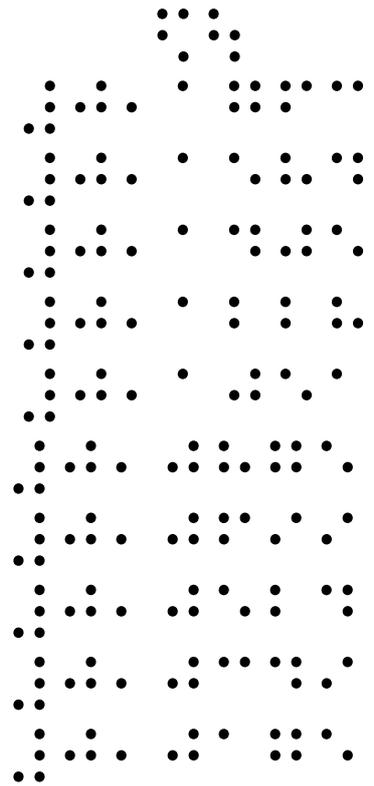
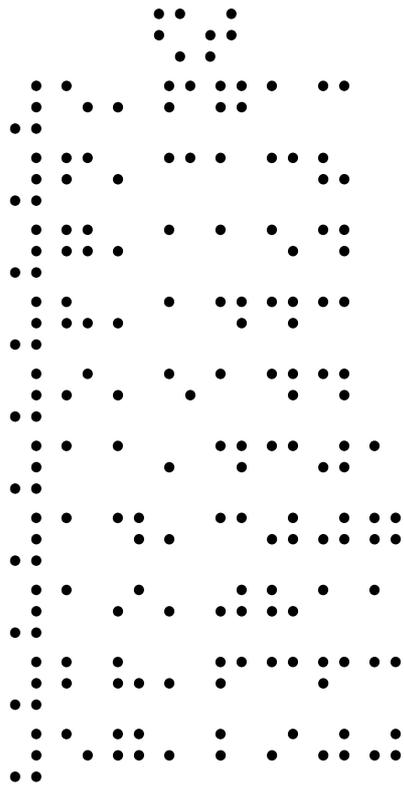
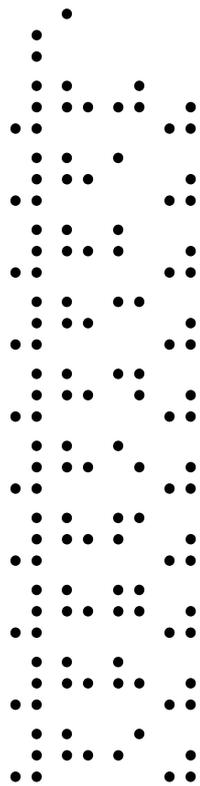




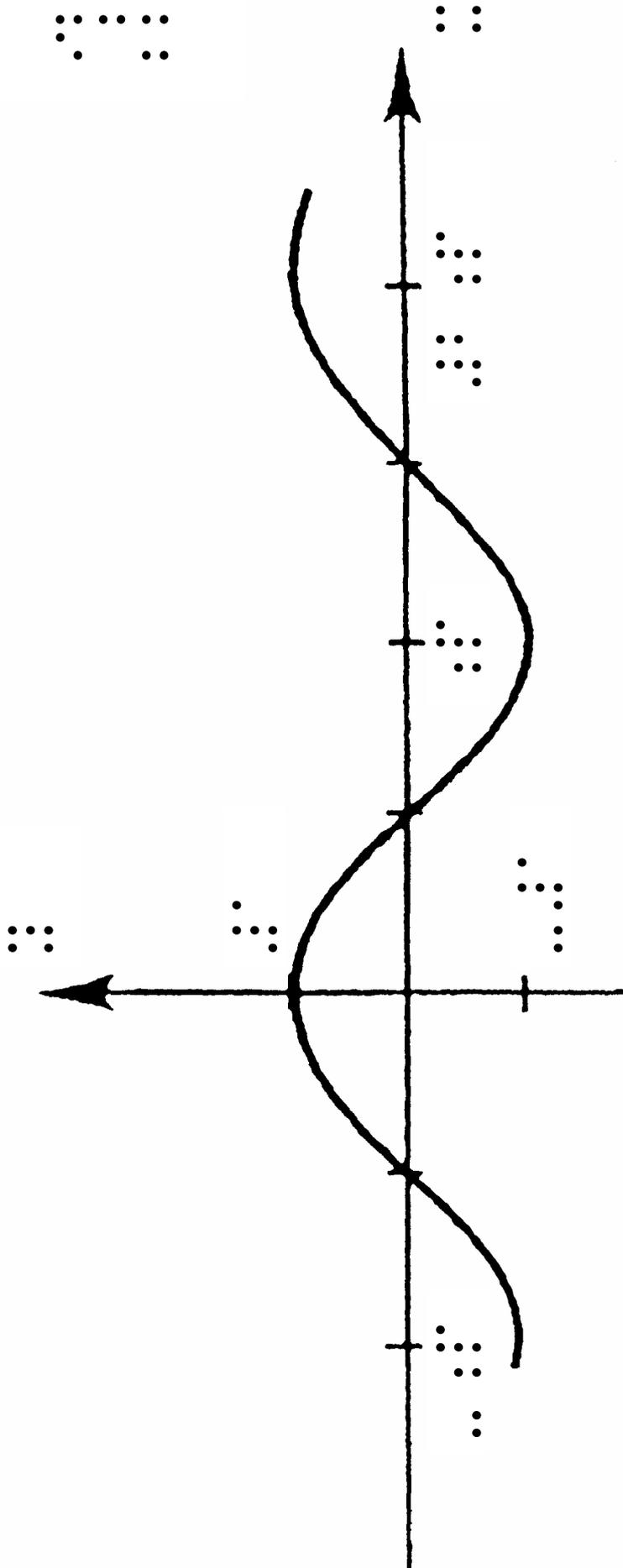






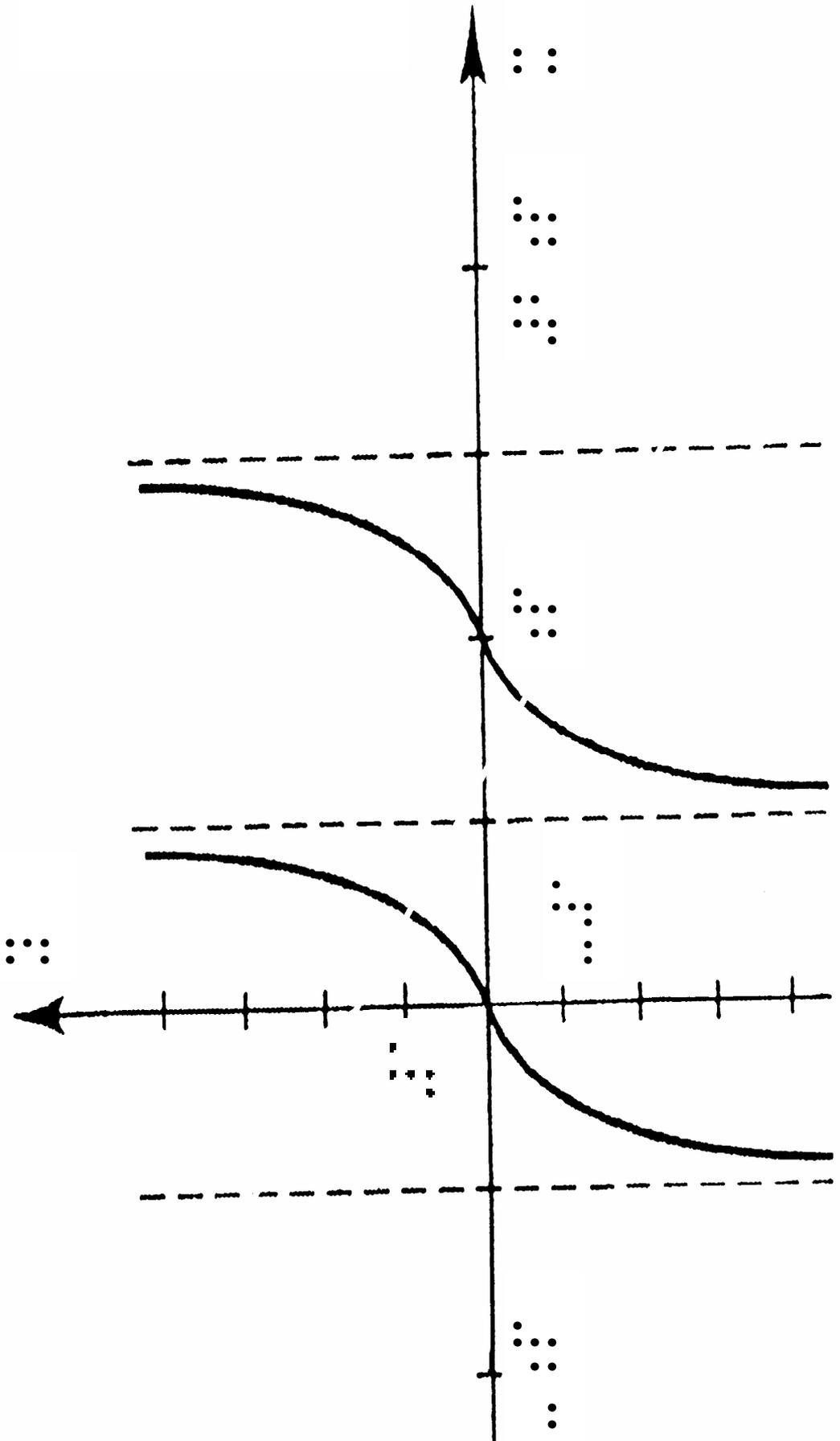


⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠



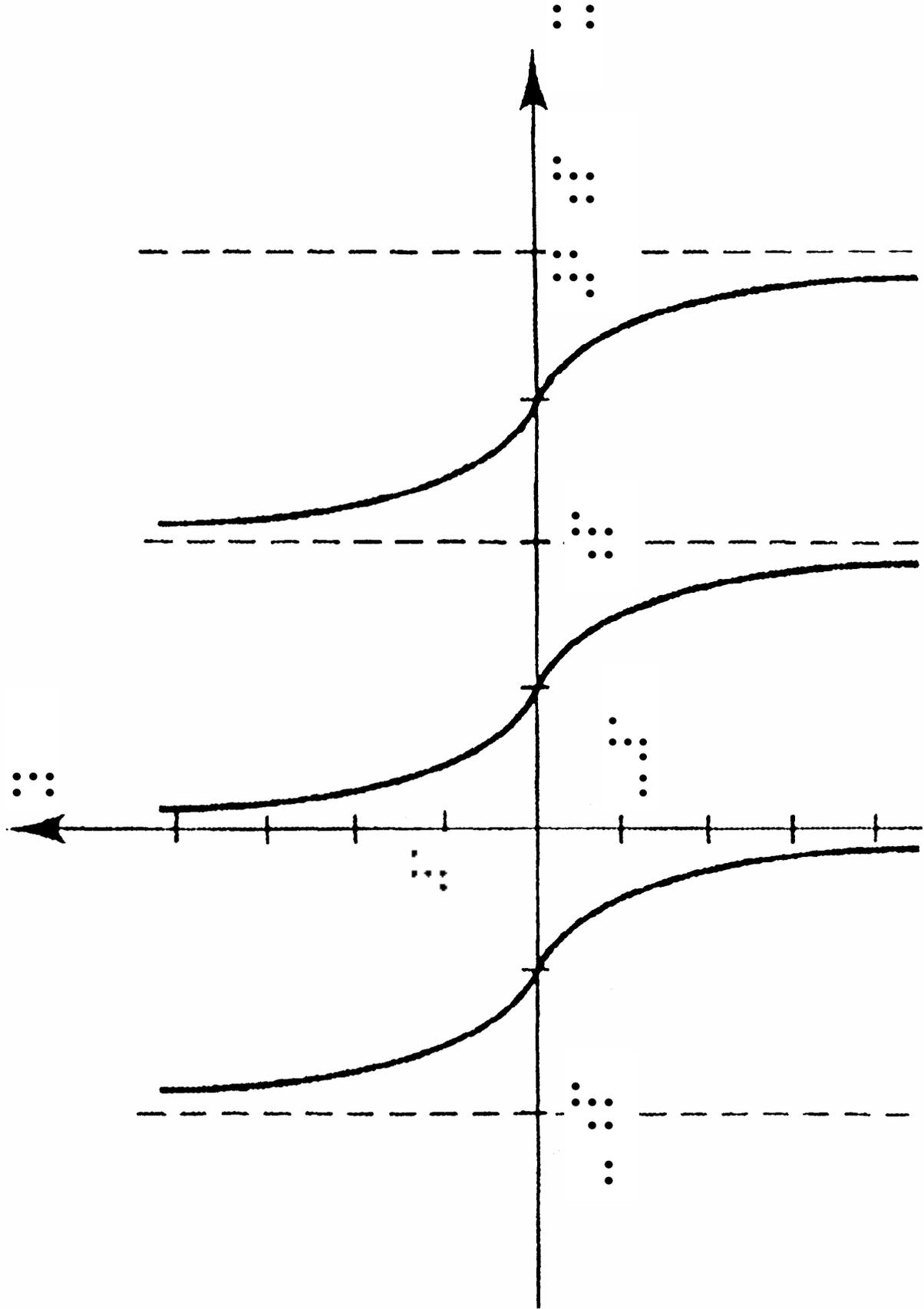
⠠⠠⠠⠠⠠⠠⠠

•• •• ••••



••••

•• •• ••••
•• •• ••••



•••••
•••••