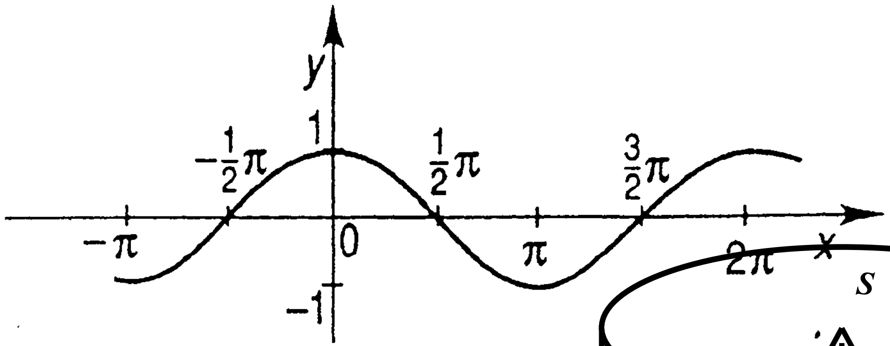
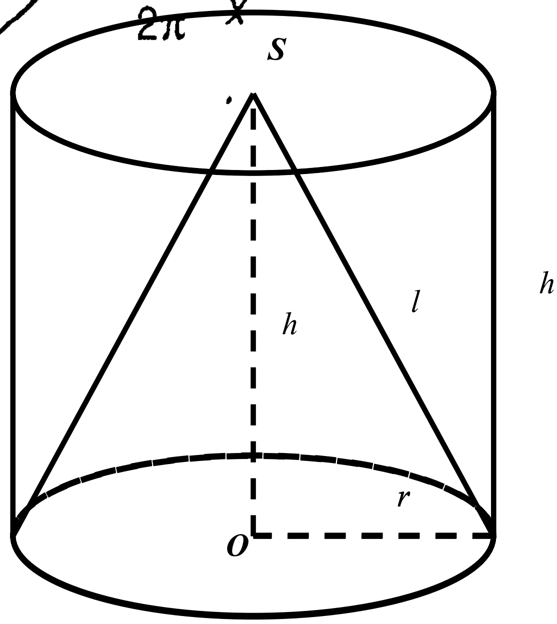
ZESTAW
WYBRANYCH WZORÓW
MATEMATYCZNYCH

Materiały pomocnicze opracowane dla potrzeb egzaminu maturalnego
i dopuszczone jako pomoce egzaminacyjne.





publikacja współfinansowana przez Europejski Fundusz Społeczny

Zestaw matematycznych wzorów został przygotowany dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki. Zestaw ten został opracowany w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej we współpracy z pracownikami wyższych uczelni oraz w konsultacji z ekspertami z okręgowych komisji egzaminacyjnych.
Na zlecenie CKE zestaw wzorów matematycznych dla potrzeb egzaminu maturalnego z matematyki dla niewidomych i słabo widzących przystosowały
mgr Bogumiła Golańska i mgr inż. Agnieszka Lato w Specjalnym Ośrodku Szkolno Wychowawczym dla Dzieci Niewidomych i Słabowidzących, Kraków ul. Tyniecka 7.

To oznaczenie wskazuje materiał z zakresu rozszerzonego.

SPIS TREŚCI

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} \text{x dla x} \in \langle 0, \infty) \\ -\text{x dla x} \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

Dla dowolnych liczb x, y

$$|x| \geq 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0,$ to $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Dla dowolnych liczb a oraz $r \geq 0$, mamy warunki równoważne:

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x - a| \geq r \Leftrightarrow (x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r)$$

POTĘGI I PIERWIASTKI

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby a definiujemy n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{\text{n razy}}$$

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Definiujemy:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^1 = a \\ a^2 = a \cdot a \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \text{ dla } n > 1 \end{cases} \quad \text{dla } a \neq 0$$

Pierwiastkiem $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.
Jeżeli $a < 0$ oraz n jest liczbą nieparzystą to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.
Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.
$\sqrt{x^2} = |x|$

Niech m, n są liczbami całkowitymi

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ dla $a \neq 0$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dla $a \geq 0$

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ dla $a > 0$

Działania na potęgach
Niech *r*, *s* będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to zachodzą równości:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki *r, s* są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$, $b \neq 0$.

SILNIA. SYMBOL NEWTONA

Silnią liczby całkowitej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$
$$0! = 1$$

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Symbol Newtona

Dla liczb *n, k* spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

DWUMIAN NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej *n* oraz dla dowolnych liczb *a, b* mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *a* i *b* mamy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^k + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

CIĄGI

Ciąg arytmetyczny

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego o danym pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \qquad \text{dla} \quad n \geq 2$$

Ciąg geometryczny

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego o danym pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wzór na sumę $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \qquad \text{dla} \quad n \geq 2$$

Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K złożymy na n lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi $p\%$ w skali rocznej, to kapitał końcowy K_n wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Granica ciągu - twierdzenia

Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = h$, to

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = g + h \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = g - h$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = g \cdot h$$

Jeżeli (a_n), $n \geq 1$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie $|q| < 1$, to ciąg sum jego początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ma granicę:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ i $a,b,c \in R$

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy $a > 0$, do dołu, gdy $a < 0$.

$f(x)=ax^2+bx+c$ **dla** $a\neq 0$ **i** $x\in R$		
wyróżnik	**liczba miejsc zerowych**	**postać iloczynowa**
$\Delta<0$	nie ma miejsc zerowych	nie ma postaci iloczynowej
$\Delta=0$	jedno miejsce zerowe $x_0=\frac{-b}{2a}$	$f(x)=a(x-x_0)^2$
$\Delta>0$	dwa różne miejsca zerowe $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$,	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

Wzory Viète'a

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

LOGARYTMY

Niech $a>0$ i $a\neq 1$. Logarytmem $\log_a c$ liczby $c>0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik b potęgi, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę c:

$$b=\log_a x \Leftrightarrow a^b=c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c}=c$$

Dla dowolnych liczb $x>0, y>0$ oraz r zachodzą wzory:

$$\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$$

$$\log_a x^r=r\cdot\log_a x$$

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
Jeżeli $a>0,\ a\neq 1\ ,b>0,\ \ b\neq 1,$ oraz $c>0,$ to

$$\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}$$

POCHODNA FUNKCJI

Jeżeli funkcje *f* i *g* mają pochodne dla $x\in R$, to:

$$[c\cdot f(x)]'=c\cdot f'(x) \quad \text{dla} \quad c\in R$$

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

$$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{gdy} \quad g(x)\neq 0.$$

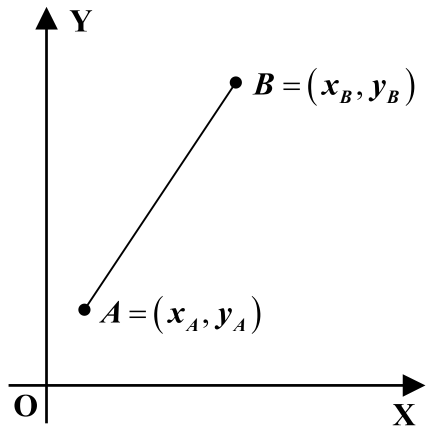
Wzór funkcji *f*	**Pochodna** $f'(x)$ **funkcji *f***	
$f(x)=c$	$f'(x)=0$	$x\in R$ i $c\in R$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$x\in R$ i $a\in R$ i $\mathrm{b}\in R$
$f(x)=ax^2+bx+c$	$f'(x)=2ax+b$	$x\in R$ i $a\in R$ i $\mathrm{b}\in R$ i $\mathrm{c}\in R$
$f(x)=x^r$	$f'(x)=rx^{r-1}$	$x\in R$ i $r\in N$ i $r>1$ lub $x\in R\setminus\{0\}$ i $r\in C$ i $r<0$
$f(x)=\frac{a}{x}$	$f'(x)=\frac{-a}{x^2}$	$x\in R$ i $x\neq 0$ i $a\in R$

Równanie stycznej
Jeżeli funkcja *f* ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji *f* w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Odcinek



Długość odcinka o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Środek $M = (x_0, y_0)$ odcinka AB

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_0 = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Wektor

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, który przesuwa punkt *A* na punkt *B*:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami, zaś *a* jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Prosta

Równanie ogólne:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ (tj. współczynniki A, B nie są równocześnie równe 0).
Jeżeli $A = 0$, prosta jest równoległa do osi Ox.
Jeżeli $B = 0$, prosta jest równoległa do osi Oy.

Jeżeli $C=0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Równanie kierunkowe prostej $y=ax+b$, gdzie $a,b\in R$.
Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej:

$a=tg\alpha$ α-kąt nachylenia prostej do osi Ox, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$.

Współczynnik b wyznacza na osi Oy punkt, w którym dana prosta ją przecina.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty
$A=(x_A,y_A)$ i $B=(x_B,y_B)$:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0.$$

Prosta i punkt
Odległość *d* punktu $P=(x_0,y_0)$ od prostej o równaniu
$Ax+By+C=0$, jest wyrażona wzorem

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Para prostych – wzajemne położenie prostych

	równanie kierunkowe prostych $l_1: y=a_1x+b_1$, $l_2: y=a_2x+b_2$	równanie ogólne prostych $l_1: A_1x+B_1x+C_1=0$, $l_2: A_2x+B_2x+C_2=0$
warunek równoległości prostych	$a_1=a_2$	$A_1B_2-A_2B_1=0$
warunek prostopadłości prostych	$1+a_1a_2=0$	$A_1A_2+B_1B_2=0$
φ - kąt między prostymi l_1 i l_2	$tg\varphi=\left\|\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}\right\|$ dla $1+a_1a_2\neq0$	$tg\varphi=\left\|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right\|$ dla $A_1A_2+B_1B_2\neq0$

Trójkąt

Pole trójkąta *ABC*, gdzie $A=(x_A,y_A),\ B=(x_B,y_B),\ C=(x_C,y_C)$ dane jest wzorem

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|.$$

Środek ciężkości $S=(x_S,y_S)$ trójkąta, czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$x_S=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\qquad y_S=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE

Punkt $A'=(x',y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych, gdy

$$x'=-x\,,\quad y'=-y.$$

Punkt $A'=(x',y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii względem osi OX, gdy

$$x'=x\quad,\quad y'=-y.$$

Punkt $A'=(x',y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w symetrii względem osi OY, gdy

$$x'=-x\,,\quad y'=y.$$

Punkt $A'=(x',y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w translacji (przesunięciu równoległym) o wektor $u=[a,b]$, gdy

$$x'=x+a\,,\quad y'=y+b.$$

Punkt $A'=(x',y')$ jest obrazem punktu $A=(x,y)$ w jednokładności o środku w punkcie $O=(0,0)$ i skali *s* $(s\neq 0)$, gdy

$$x'=sx\quad,\quad y'=sy.$$

Równanie okręgu o środku w punkcie $S=(a,b)$ i promieniu $r>0$:

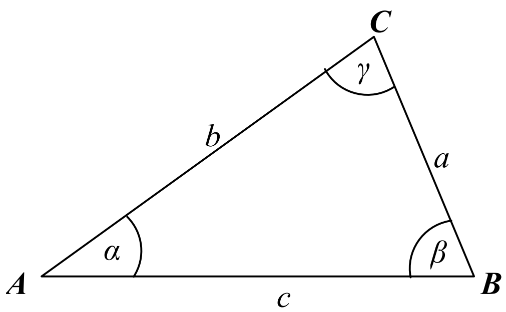
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

lub $$x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$$

gdzie $r^2=a^2+b^2-c$ i $a^2+b^2-c>0$.

PLANIMETRIA

Oznaczenia



a,b,c – długości boków,leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków A,B,C;
$2p=a+b+c$ – obwód trójkąta;
α,β,γ - miary kątów przy wierzchołkach A,B,C;
h_a,h_b,h_c – wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołków A,B,C;
R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie
r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt

Wzory na pole trójkata

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$P_{\Delta ABC}=2R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$P_{\Delta ABC} = rp$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ (wzór Herona)

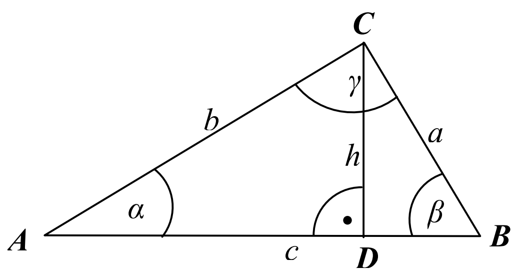
Twierdzenie sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Twierdzenie Pitagorasa



Jeżeli miara kąta $\gamma = 90^\circ$, to:

$a^2 + b^2 = c^2$ – twierdzenie Pitagorasa

Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Jeżeli miara kąta $\gamma = 90^\circ$, to:

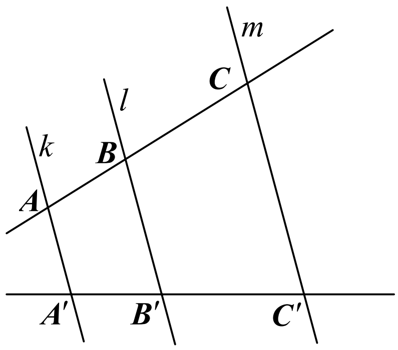
$h^2 = pq$ gdzie $p = |AD|$, $q = |DB|$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta$$

$$a = b \cdot tg\alpha = b \cdot ctg\beta$$

$$R = \frac{1}{2}c$$

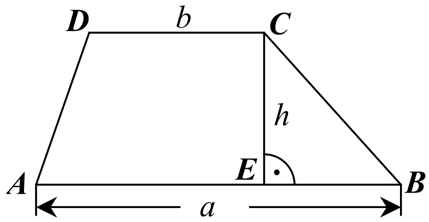
Twierdzenie Talesa



Jeżeli $k \parallel l$ i $l \parallel m$, to:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

Czworokąty

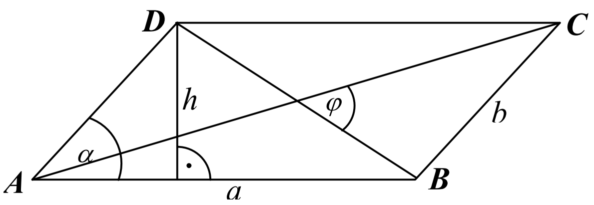


Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

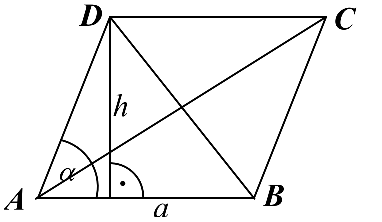
Wzór na pole równoległoboku:

$$P = ah$$

$$P = ab \cdot \sin\alpha$$

$$d_1 = |AC|,\ d_2 = |BD|$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi}{2}$$



Romb

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

Wzór na pole rombu:

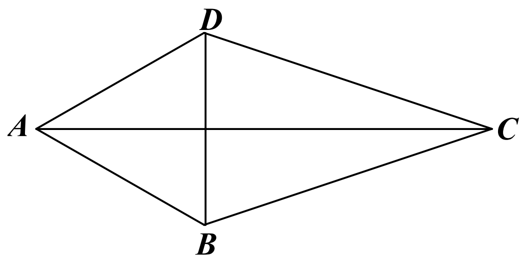
$$P = ah$$

$$P = a^2 \cdot \sin\alpha$$

$$d_1 = |AC|,\ d_2 = |BD|$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Deltoid



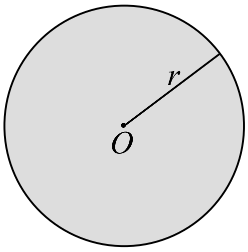
Czworokąt, który ma oś symetrii, zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$d_1 = |AC|,\ d_2 = |BD|$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Koło



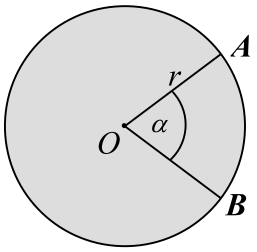
P - pole koła o promieniu *r*

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła

$$Ob = 2\pi r$$

Wycinek koła



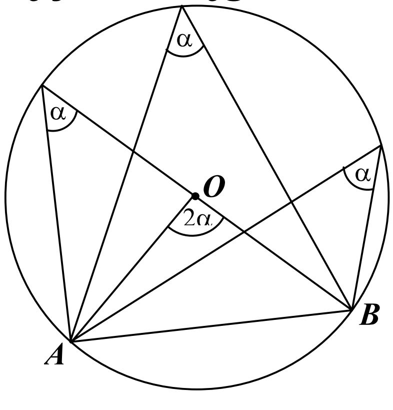
Pole wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

l – długość łuku

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

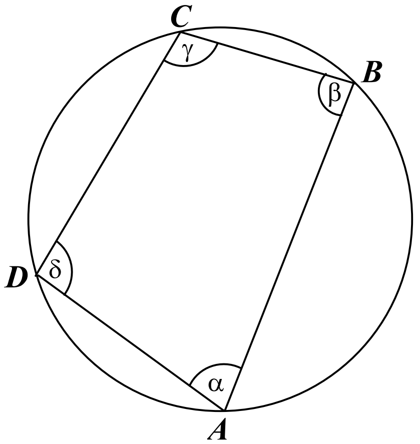
Kąty w okręgu



Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

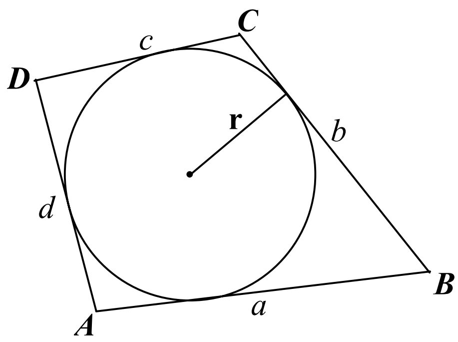
Okrąg opisany na czworokacie



Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych jest równa 180°:

$$\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$$

Okrąg wpisany w czworokąt



W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe:

$$a+c=b+d$$

STEREOMETRIA

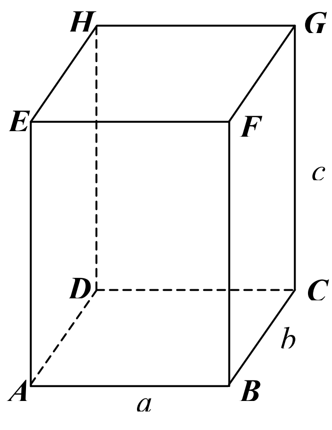
Oznaczenia

P – pole powierzchni całkowitej, P_p – pole podstawy,

P_b – pole powierzchni bocznej,

V – objętość bryły.

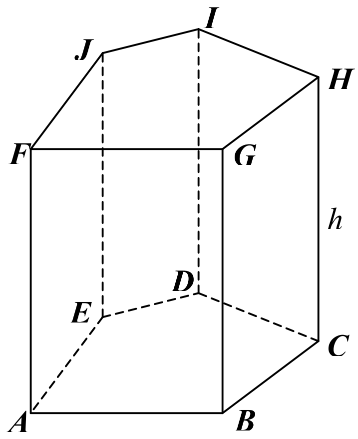
Prostopadłościan



a,b,c – długości krawędzi

$P=2(ab+bc+ac)$

$V=abc$



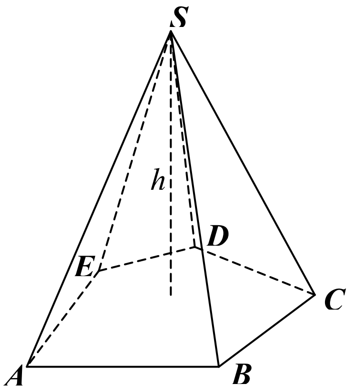
Graniastosłup prosty

$2p$ – długość obwodu podstawy

h – długość wysokości

$P_b = 2p \cdot h$

$V = P_p \cdot h$

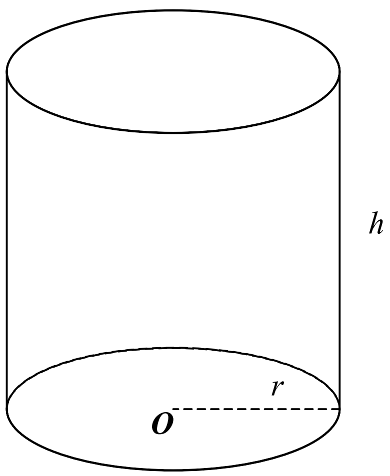


Ostrosłup

h – długość wysokości

$P = P_p + P_b$

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$



Walec

r – długość promienia podstawy

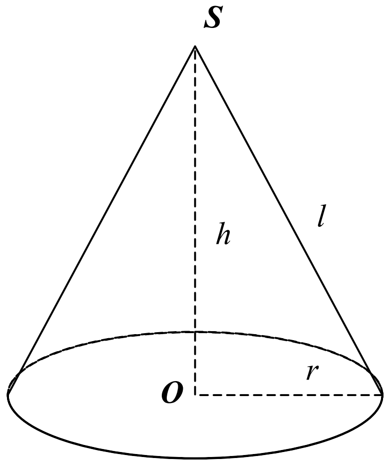
h – długość wysokości

$P_b = 2\pi r \cdot h$

$P = 2\pi r(r + h)$

$V = \pi r^2 h$

Stożek



r – długość promienia podstawy

h – długość wysokości

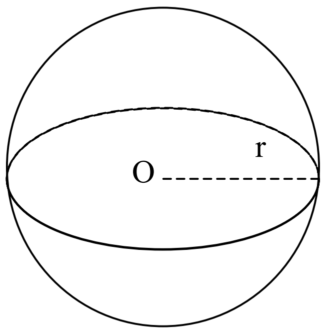
l – długość tworzącej

$$P_b = \pi\, r\, l$$

$$P = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Kula



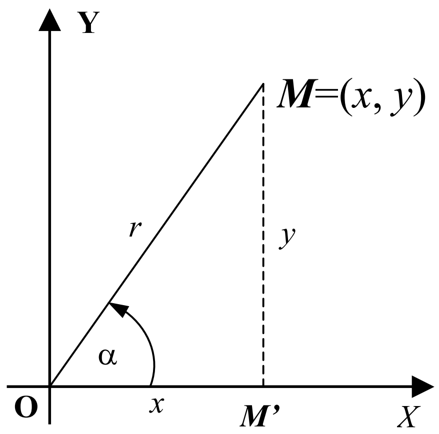
r – długość promienia kuli

$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

TRYGONOMETRIA

Definicje funkcji trygonometrycznych



$$\sin\alpha = \frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta *α*, gdzie $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$**:**

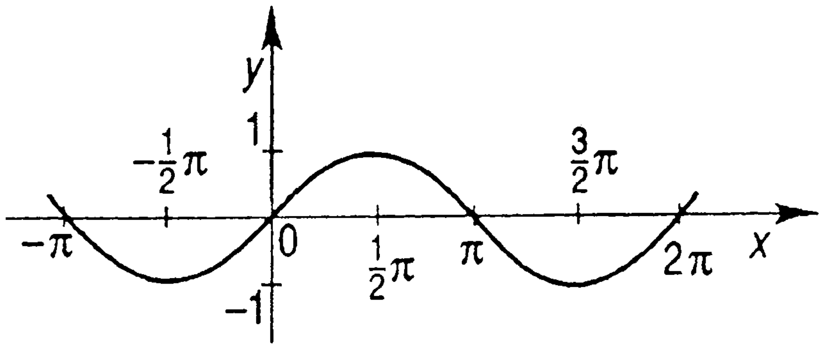
α	α°	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0	0	0	1	0	nie istnieje
$(0, \frac{\pi}{2})$	$(0, 90^\circ)$	+	+	+	+
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	nie istnieje	0
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(90^\circ, 180^\circ)$	+	–	–	–
π	180°	0	-1	0	nie istnieje
$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(180^\circ, 270^\circ)$	–	+	+	+
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	nie istnieje	0
$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$(270^\circ, 360^\circ)$	–	+	–	–
2π	360°	0	1	0	nie istnieje

\+ oznacza, że funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

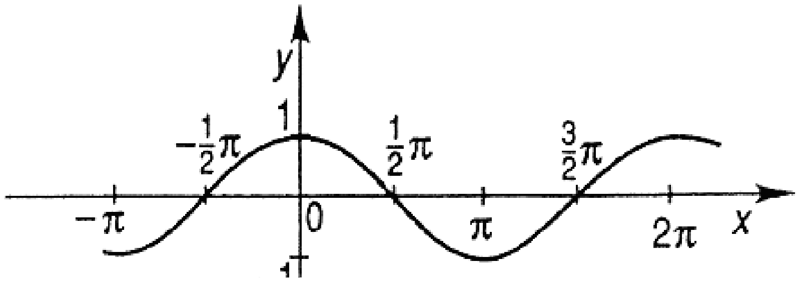
– oznacza, że funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Wykresy funkcji trygonometrycznych

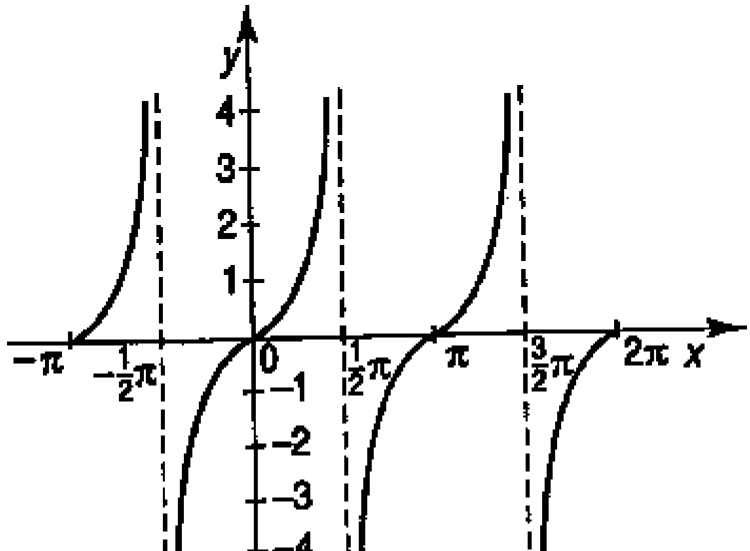
$y = \sin x$



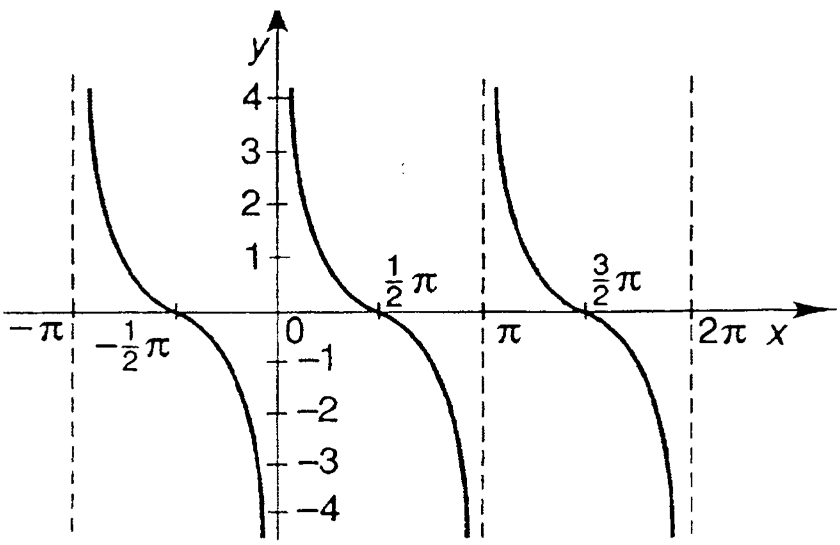
$y = \cos x$



$y = tgx$



$y = ctgx$



Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dla dowolnego kąta α
- $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ dla $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in C$
- $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ dla $\alpha \neq k\pi,\ k \in C$
- $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$ dla $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in C$

Wartości funkcji trygonometrycznych:

α	$0,(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6},(30^\circ)$	$\frac{\pi}{2},(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3},(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2},(90^\circ)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*nie istnieje*
$ctg\alpha$	*nie istnieje*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Wzory redukcyjne

$\varphi =$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$

Wzory redukcyjne

$\varphi =$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α i β:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Jeżeli $1-tg\alpha\cdot tg\beta\neq 0$, to

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Jeżeli $1+tg\alpha\cdot tg\beta\neq 0$, to

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Jeżeli $ctg\alpha+ctg\beta\neq 0$, to

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

Jeżeli $ctg\alpha - ctg\beta \neq 0$, to

$$ctg(\alpha - \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta}$$

Funkcje kąta podwojonego

Dla dowolnego kąta *α*:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in C$ to

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in C$ i $1 - tg^2\alpha \neq 0$ to

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Jeżeli $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2},\ k \in C$ i $ctg\alpha \neq 0$ to

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

Funkcje kąta potrojonego

Dla dowolnego kąta *α*:

$$\sin 3\alpha = \sin\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin\alpha(3 - 4\sin^2\alpha)$$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3)$$

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

Dla dowolnych kątów α i β:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

KOMBINATORYKA

Permutacje

Liczba sposobów P_n, w jaki $n \geq 1$ elementów można ustawić w ciąg, jest wyrażona wzorem: $P_n = n!$

Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów V_n^k, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg składający się z k $(1 \leq k \leq n)$ różnych wyrazów, jest równa:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów W_n^k, w jaki z n elementów można utworzyć ciąg składający się z k niekoniecznie różnych wyrazów, jest wyrażona wzorem:

$$W_n^k = n^k$$

Kombinacje

Liczba sposobów C_n^k, w jaki spośród n elementów można wybrać k $(0 \leq k \leq n)$ elementów, jest równa:

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa:

Jeżeli Ω jest skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych równoprawdopodobnych i $A \subset \Omega$, to liczbę

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia *A*, gdzie

$|A|, \overline{\overline{A}}, m(A)$ – liczba wszystkich elementów zbioru *A*,

$|\Omega|, \overline{\overline{\Omega}}, m(\Omega)$ – liczba wszystkich elementów zbioru Ω.

Własności prawdopodobieństwa:

- $0 \le P(A) \le 1$ dla każdego $A \subset \Omega$
- $P(\Omega) = 1$ Ω- zdarzenie pewne
- $P(\emptyset) = 0$ $\emptyset$- zdarzenie niemożliwe
- $P(A) \le P(B)$ dla $A \subset B$
- $P(A') = 1 - P(A)$ gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do $A \subset \Omega$
- Jeżeli $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$, to prawdopodobieństwo sumy zdarzeń *A* i *B*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są niezależne, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A \setminus B)$ zdarzenia *A* pod warunkiem, że zaszło zdarzenie *B*, nazywamy liczbę

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{gdzie } A \subset \Omega,\ B \subset \Omega \text{ i } P(B) > 0.$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n \subset \Omega$, spełniają warunki:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \ne j$ oraz $i, j \in \{1,2,...,n\}$
2. $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $i \in \{1,2,...,n\}$

to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór:

$$P(A) = P(A \setminus B_1) \cdot P(B_1) + P(A \setminus B_2) \cdot P(B_2) + ...P(A \setminus B_n) \cdot P(B_n).$$

Twierdzenie Bernoullego
Prawdopodobieństwo $P_N(k)$ uzyskania dokładnie *k* sukcesów $(0 \le k \le N)$ w schemacie *N* prób Bernoullego
wyraża się wzorem:

$$P_N(k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot q^{N-k}$$

gdzie: $p > 0,\ \ q > 0 \ \text{ i } \ p + q = 1$

p – prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie,
q - prawdopodobieństwo porażki w pojedynczej próbie.

PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

Średnia arytmetyczna $\overline{a}$ liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Średnia ważona m_n liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, którym przypisano odpowiednio dodatnie wagi $w_1, w_2, ..., w_n$ jest równa

$$m_n = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + ... + w_n a_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

Średnia geometryczna m_g dodatnich liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$

Średnia harmoniczna m_h dodatnich liczb $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Mediana M *n* uporządkowanych niemalejąco danych $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n$ jest równa

- $M = a_{\frac{n+1}{2}}$ jeżeli *n* jest liczbą nieparzystą
- $M = \frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$, jeżeli *n* jest liczbą parzystą

Wariancja σ^2 z *n* uporządkowanych danych $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \overline{a})^2 + (a_2 - \overline{a})^2 + (a_3 - \overline{a})^2 + ... + (a_n - \overline{a})^2}{n}.$$

Odchylenie standardowe σ z *n* uporządkowanych danych $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ jest równa

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}\ .$$

TABLICA FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$tg\alpha$ / $ctg\beta$	β [°]
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59

α [°]	$\sin\alpha$ / $\cos\beta$	$tg\alpha$ / $ctg\beta$	β [°]
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13

32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	**–**	**0**