

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

dysleksja

**PRÓBNY EGZAMIN  
MATURALNY  
Z MATEMATYKI  
POZIOM ROZSZERZONY**

**Czas pracy 180 minut**

**LISTOPAD  
ROK 2006**

**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 16 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
8. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

*Życzymy powodzenia!*

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

**Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

**PESEL ZDAJĄCEGO**

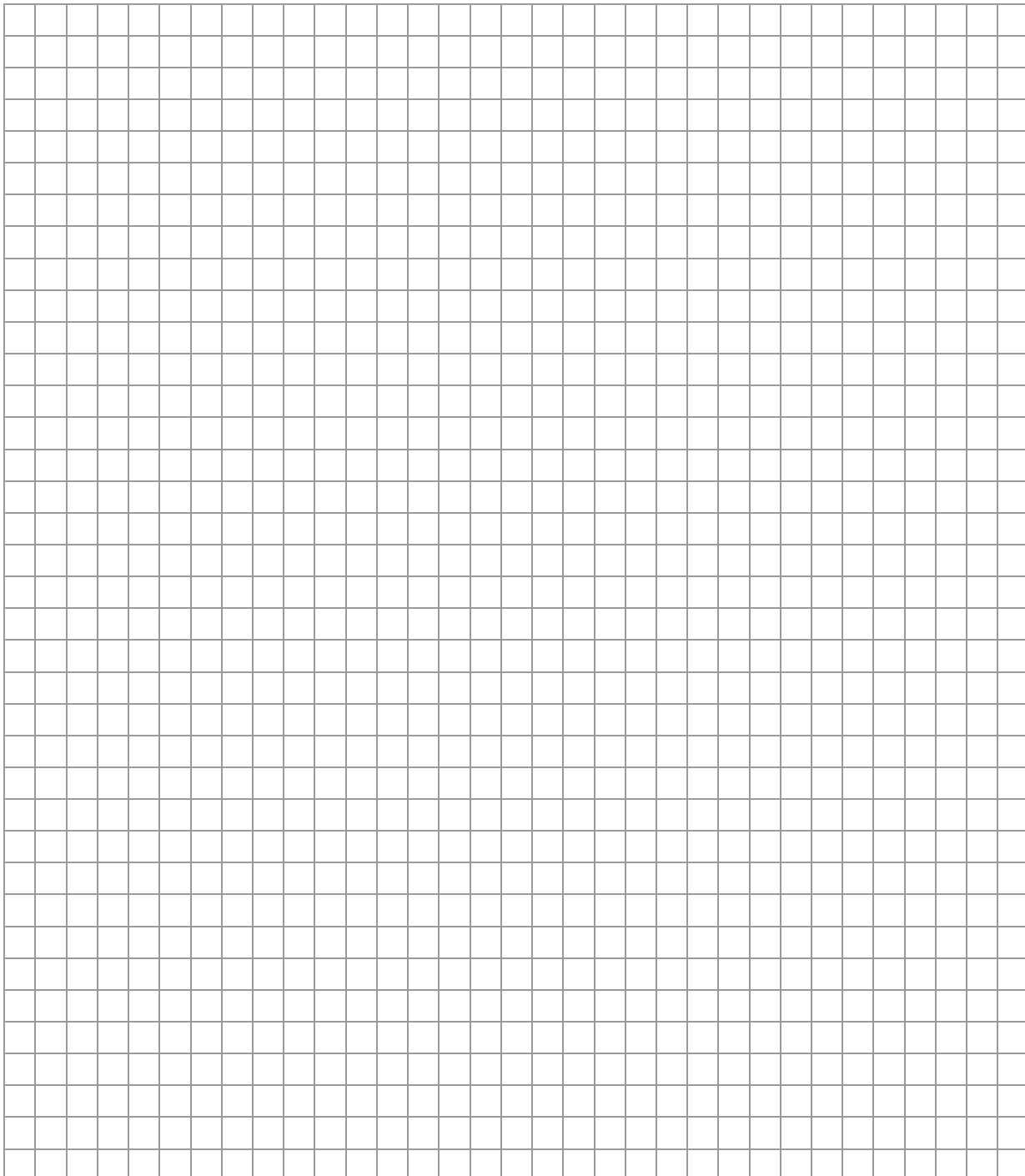
--	--	--

**KOD  
ZDAJĄCEGO**

**Zadanie 1. (5 pkt)**

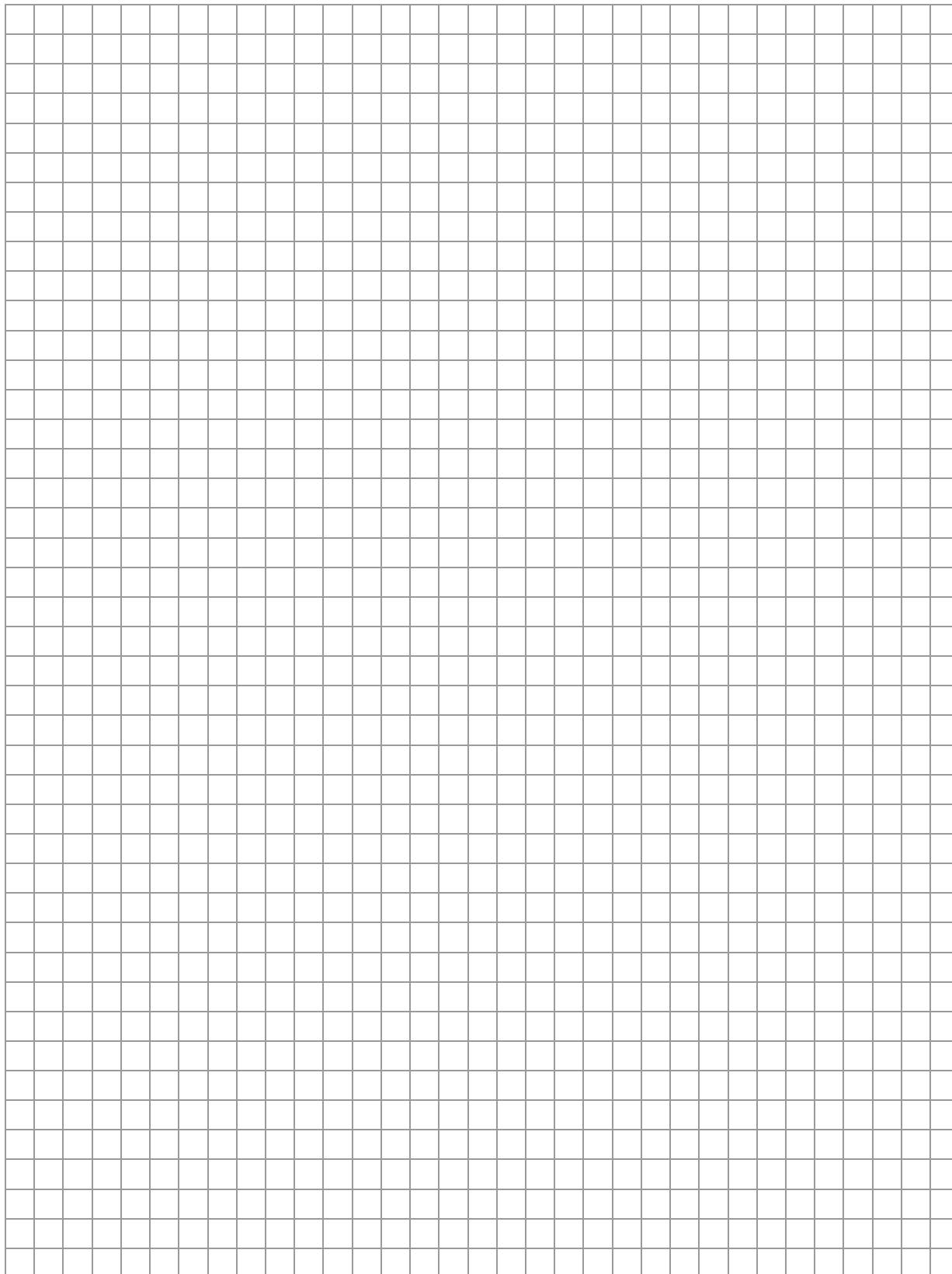
Funkcja homograficzna  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$ , gdzie  $p \in \mathbb{R}$  jest parametrem i  $|p| \neq \sqrt{3}$ .

- a) Dla  $p=1$  zapisz wzór funkcji w postaci  $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$ , gdzie  $k$  oraz  $m$  są liczbami rzeczywistymi.
- b) Wyznacz wszystkie wartości parametru  $p$ , dla których w przedziale  $(p, +\infty)$  funkcja  $f$  jest malejąca.



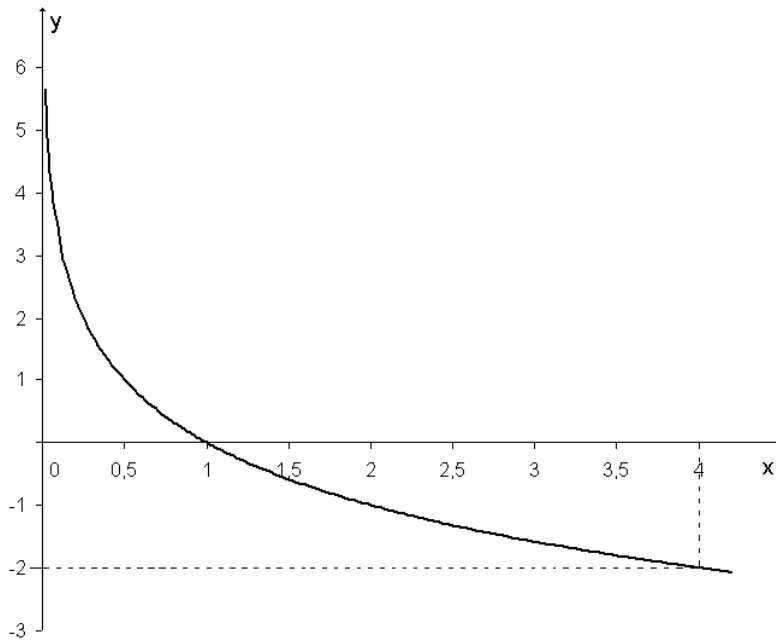
**Zadanie 2. (5 pkt)**

Wyznacz wszystkie wartości  $k \in R$ , dla których pierwiastki wielomianu  $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$  są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

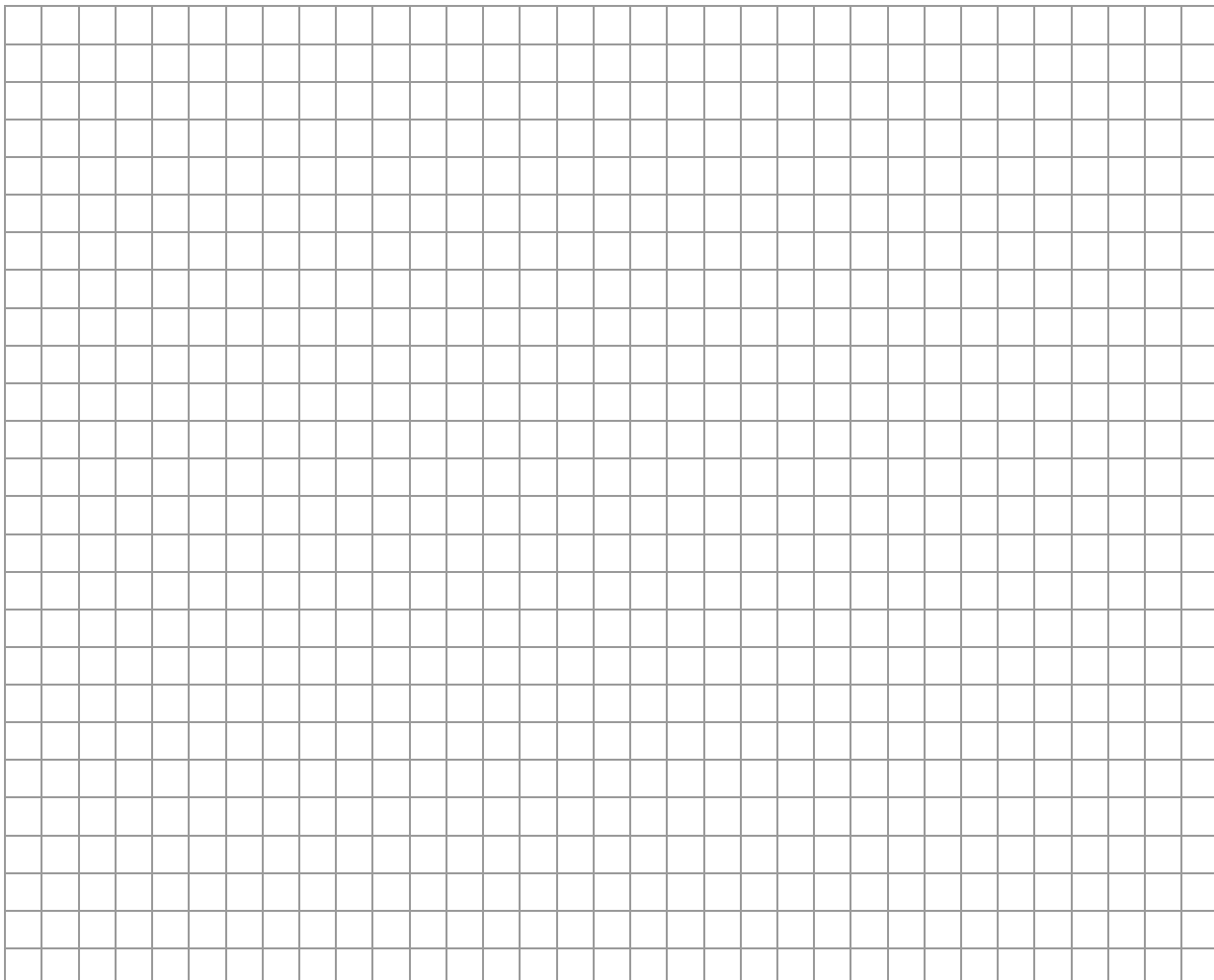


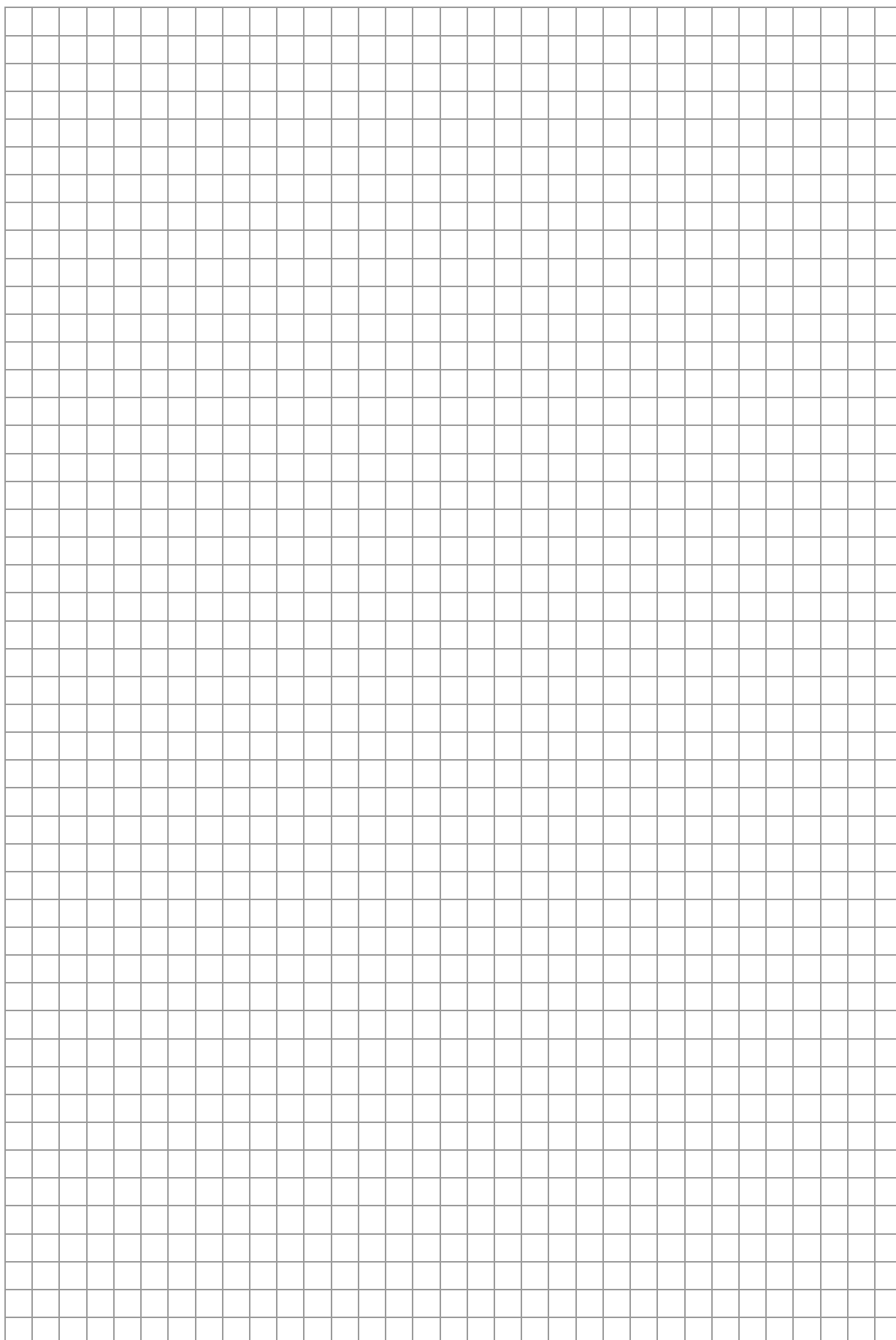
**Zadanie 3. (4 pkt)**

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej  $f$ .



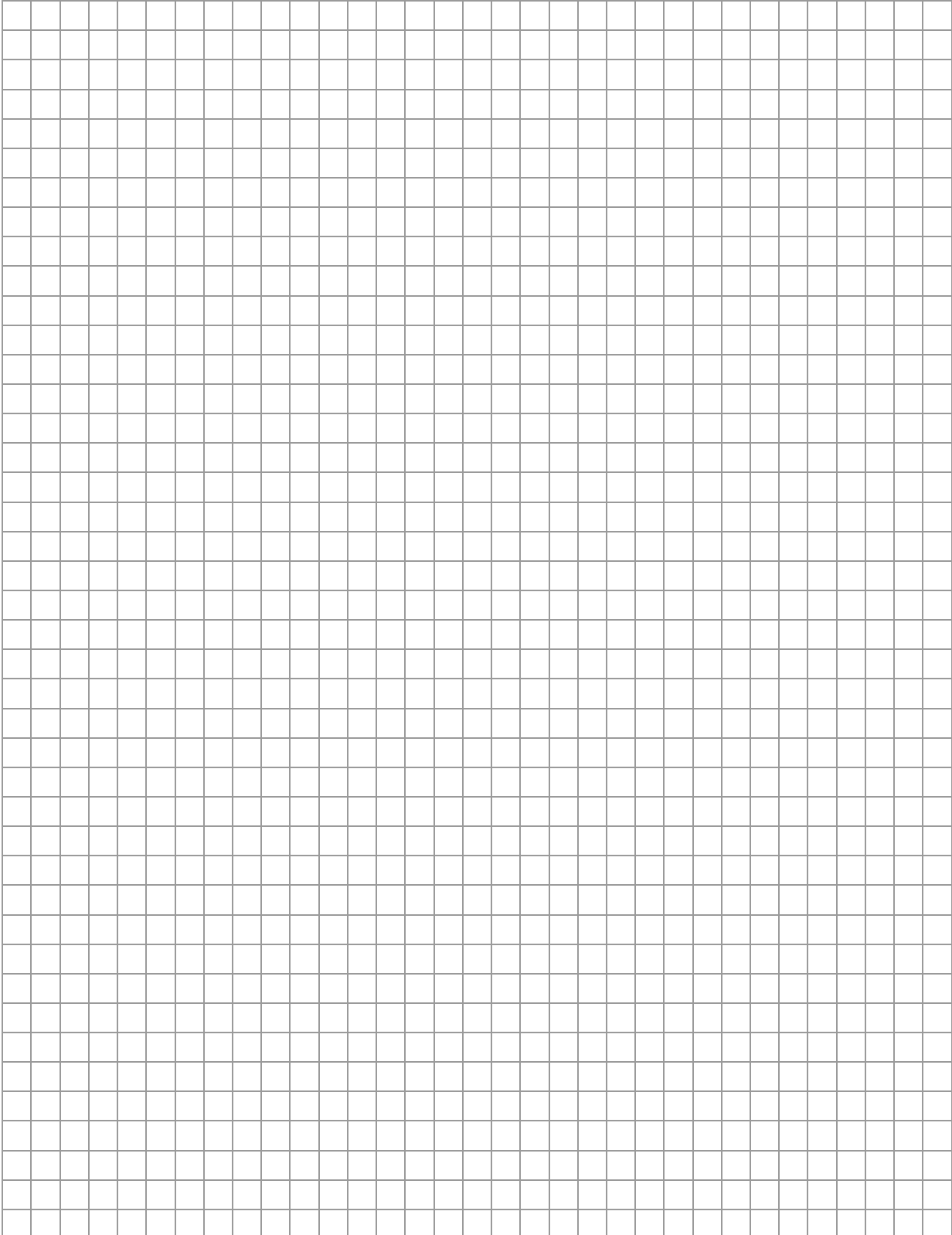
Rozwiąż równanie  $(f(x))^2 - 16 = 0$ .





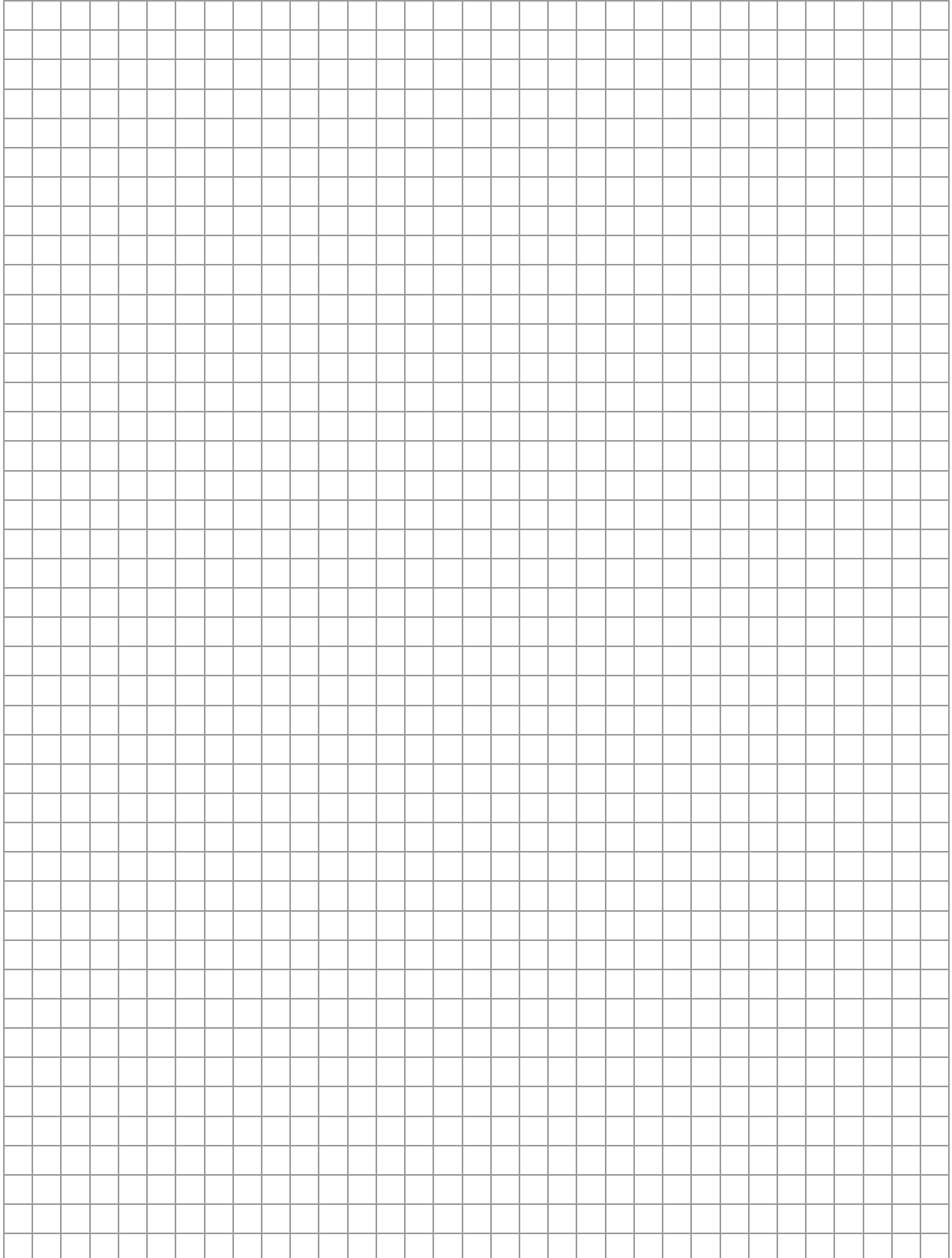
**Zadanie 4. (7 pkt)**

Trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$  i  $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$ , jest opisany na okręgu o promieniu  $\sqrt{3}$ . Oblicz odległość wierzchołka  $C$  trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.



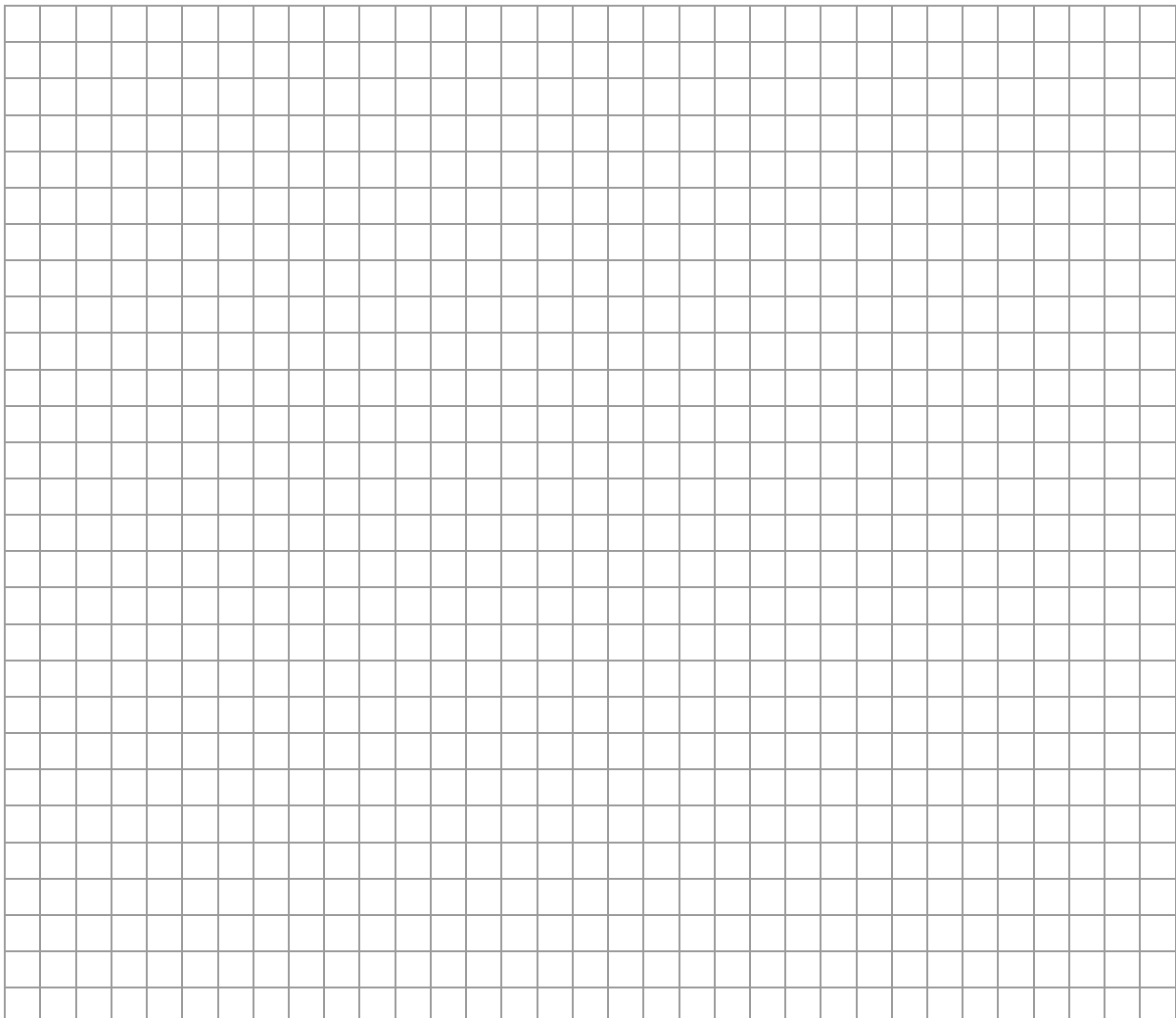
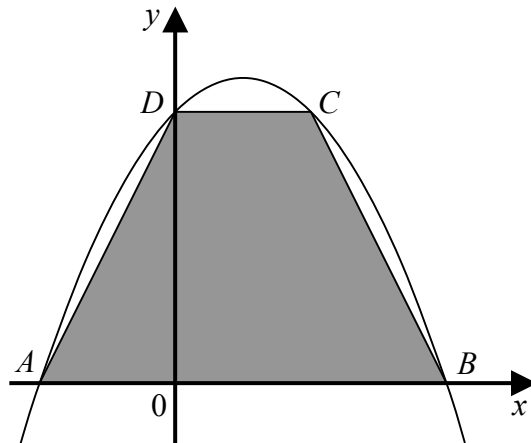
**Zadanie 5. (3 pkt)**

Sporządź wykres funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = 2|x| - x^2$ , a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości  $x$ , dla których funkcja  $f$  przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości  $x$ , dla których przyjmuje minima lokalne.



**Zadanie 6. (4 pkt)**

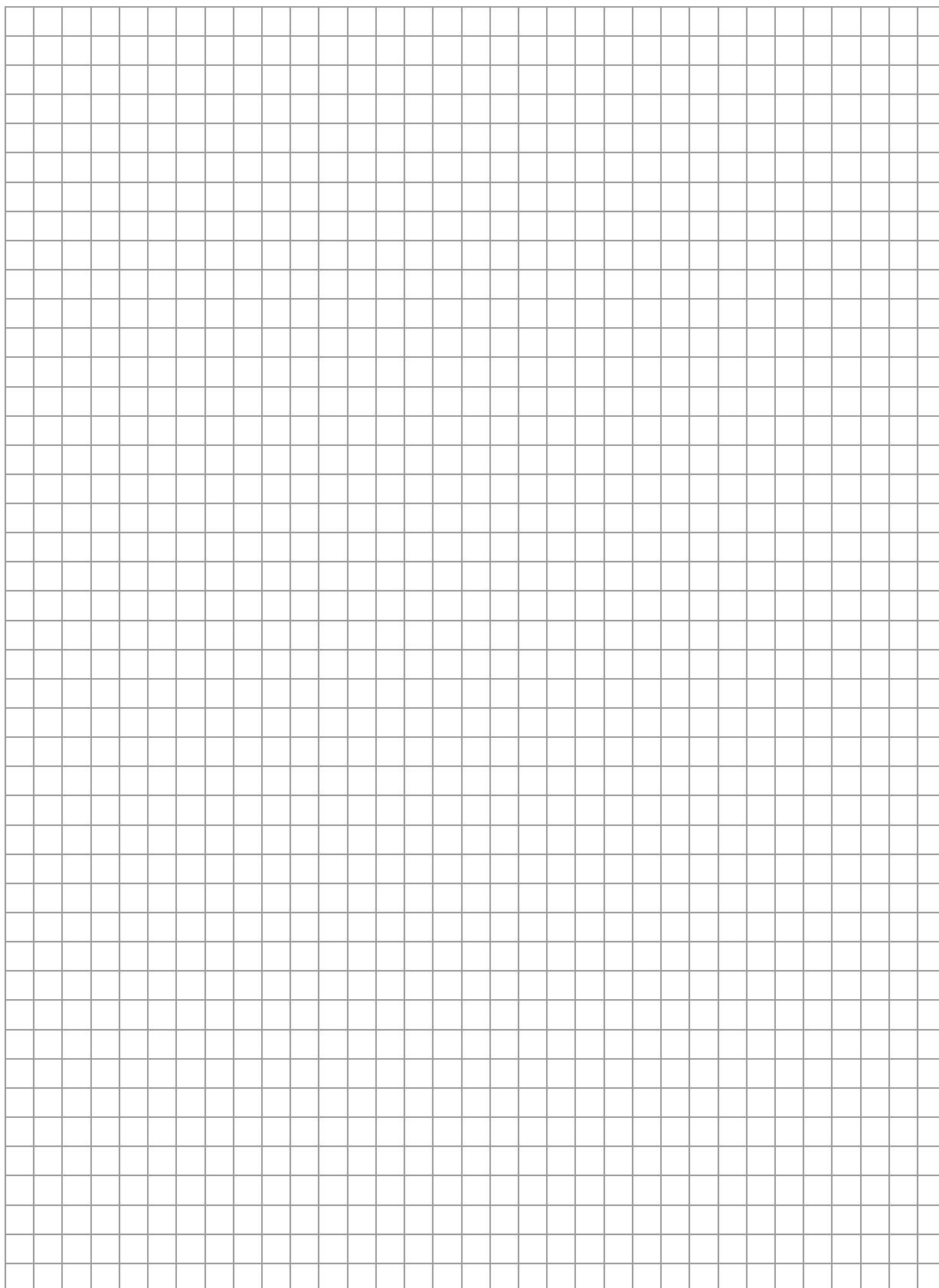
Podstawa  $AB$  trapezu  $ABCD$  jest zawarta w osi  $Ox$ , wierzchołek  $D$  jest punktem przecięcia paraboli o równaniu  $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$  z osią  $Oy$ . Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.





**Zadanie 7. (3 pkt)**

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania  $2\cos^2 x = \cos x$  należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .



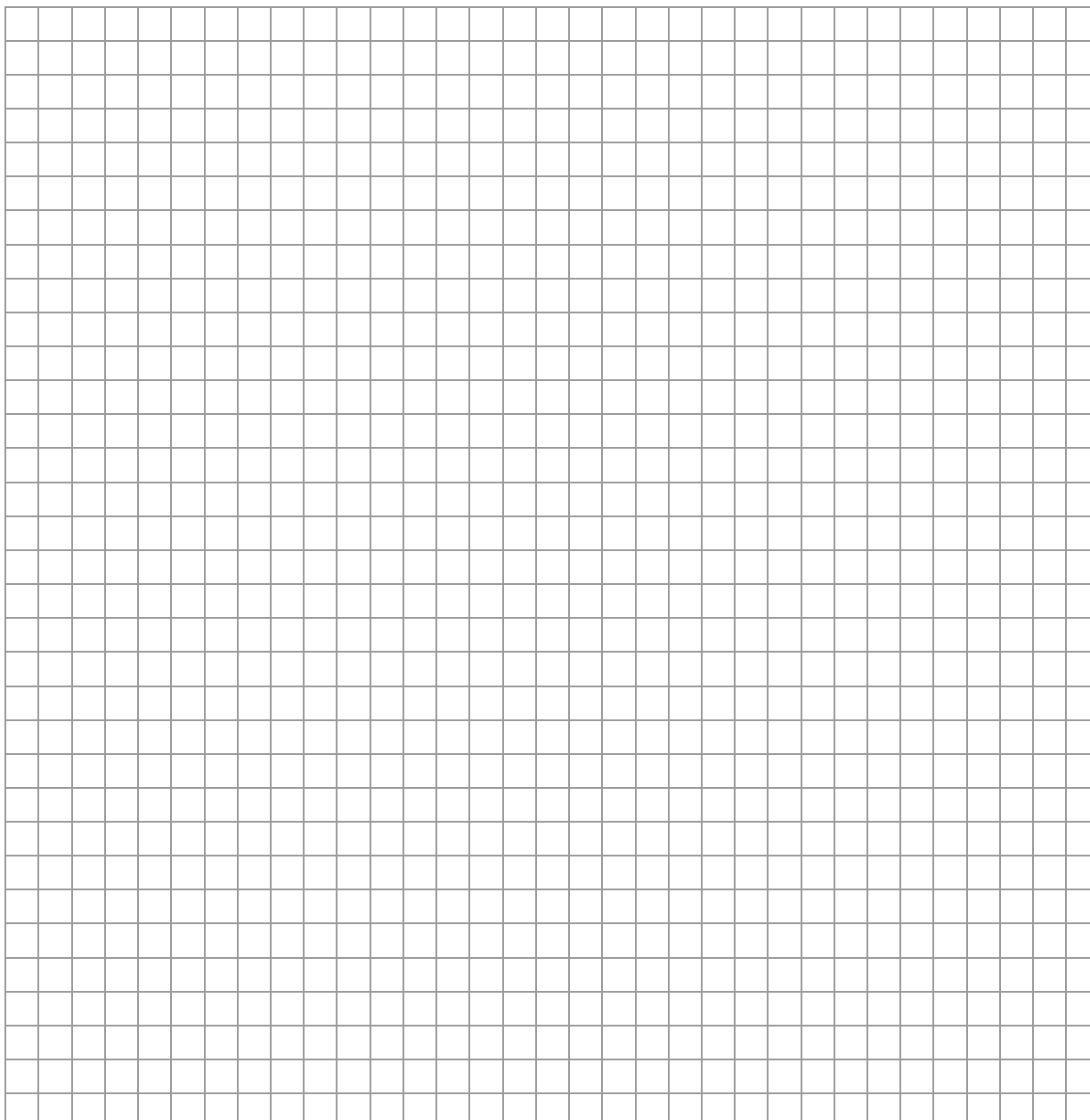
**Zadanie 8. (4 pkt)**

Uczeń analizował własności funkcji  $f$ , której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną  $f'(x)$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ . Wyniki tej analizy zapisał w tabeli.

$x$	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 2)$	$2$	$(2, 3)$	$3$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	$0$	$(-)$	$0$	$(-)$	$0$	$(-)$
$f(x)$		$2$		$-1$		$1$	

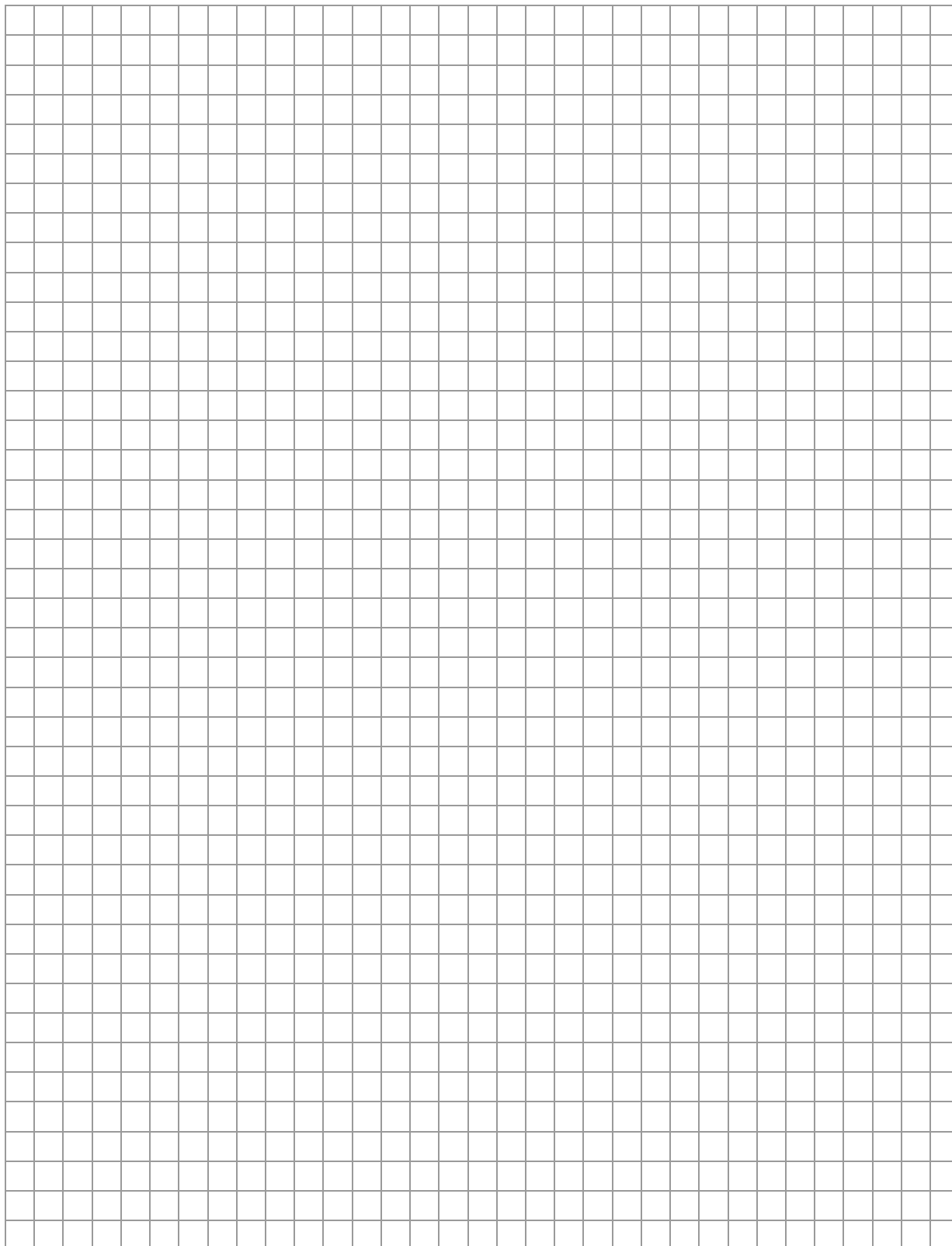
Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

- Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.
- Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji  $f$ . Uzasadniając swoją odpowiedź możesz naszkicować przykładowe wykresy funkcji.



**Zadanie 9. (3 pkt)**

Niech  $A \subset \Omega$  i  $B \subset \Omega$  będą zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń:  $P(A) = 0,5$ ,  $P(B) = 0,4$  i  $P(A \setminus B) = 0,3$ , zbadaj, czy  $A$  i  $B$  są zdarzeniami niezależnymi.

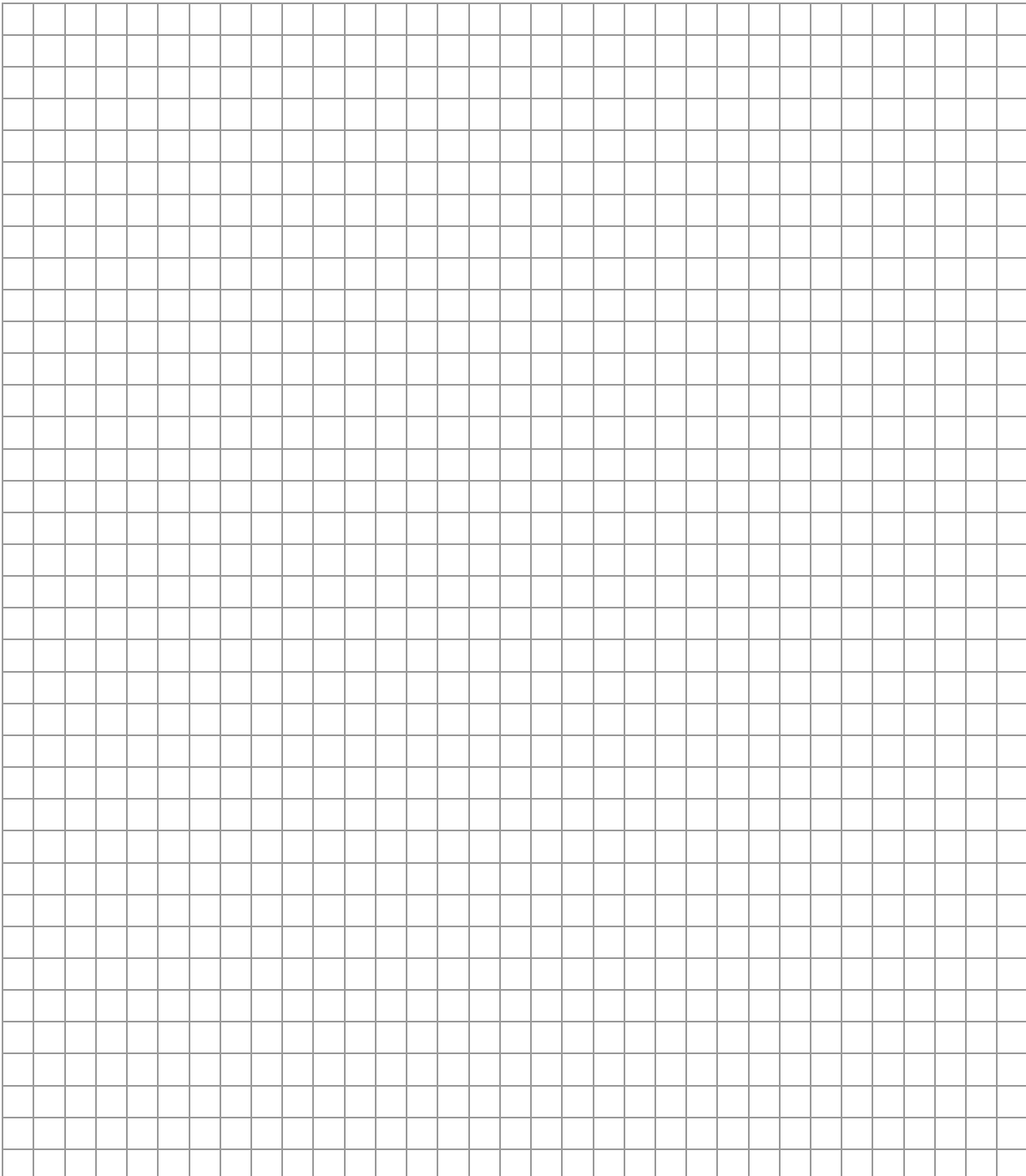


**Zadanie 10. (5 pkt)**

Ciąg liczbowy  $(a_n)$  jest określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$  wzorem

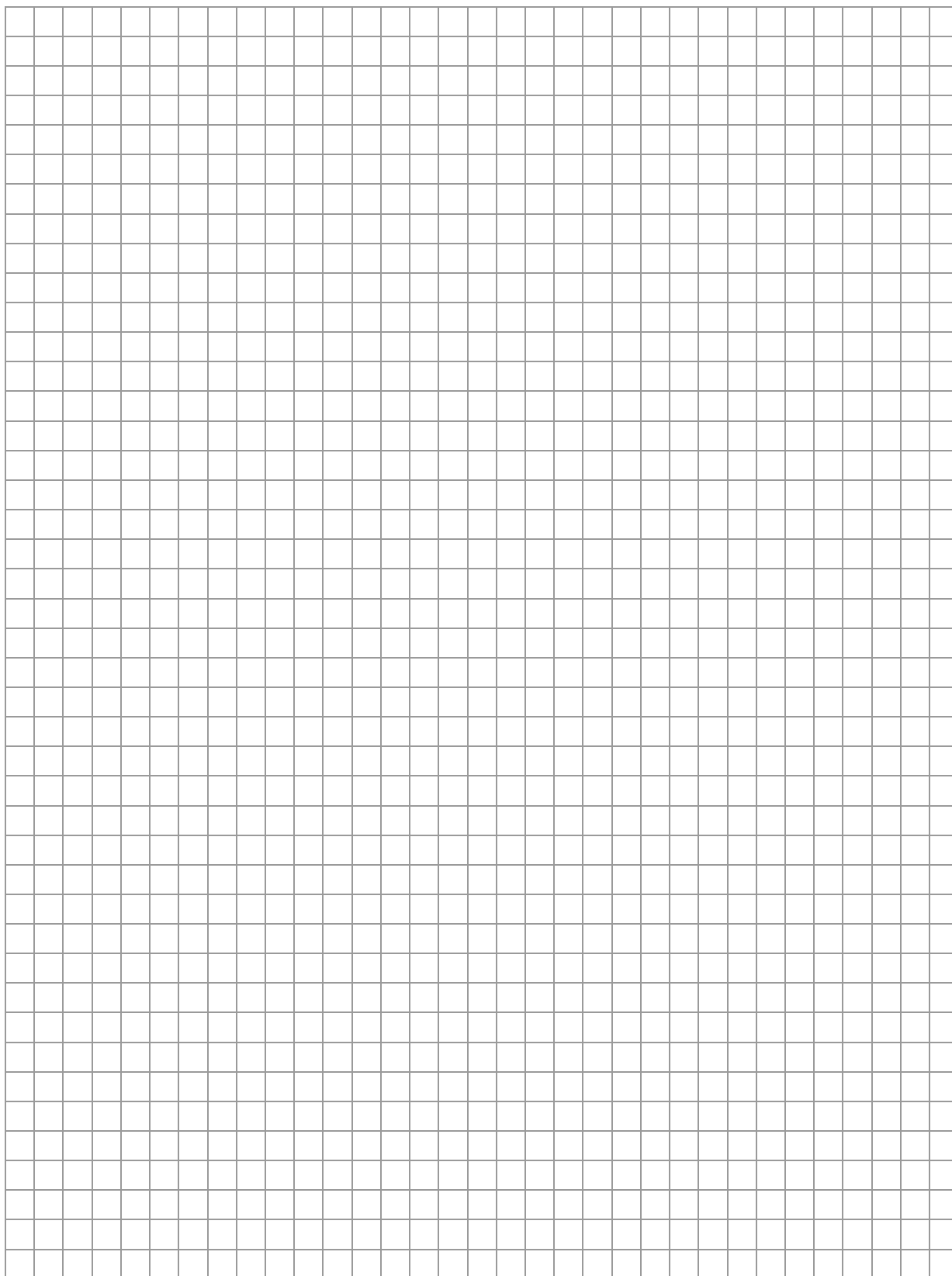
$$a_n = (n-3)(2-p^2), \text{ gdzie } p \in \mathbb{R}.$$

- Wykaż, że dla każdej wartości  $p$  ciąg  $(a_n)$  jest arytmetyczny.
- Dla  $p = 2$  oblicz sumę  $a_{20} + a_{21} + a_{22} \dots + a_{40}$ .
- Wyznacz wszystkie wartości  $p$ , dla których ciąg  $(b_n)$  określony wzorem  $b_n = a_n - pn$  jest stały.



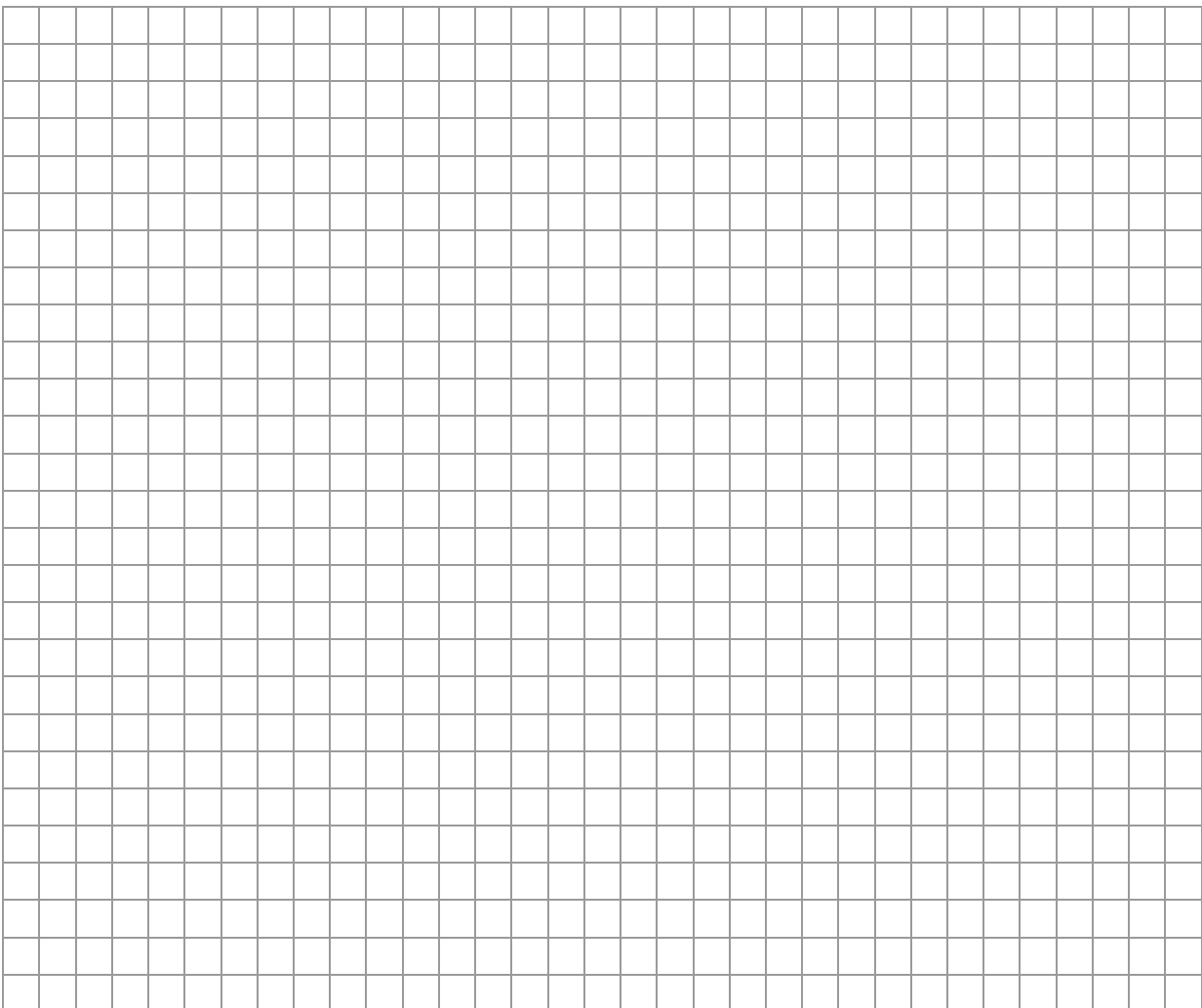
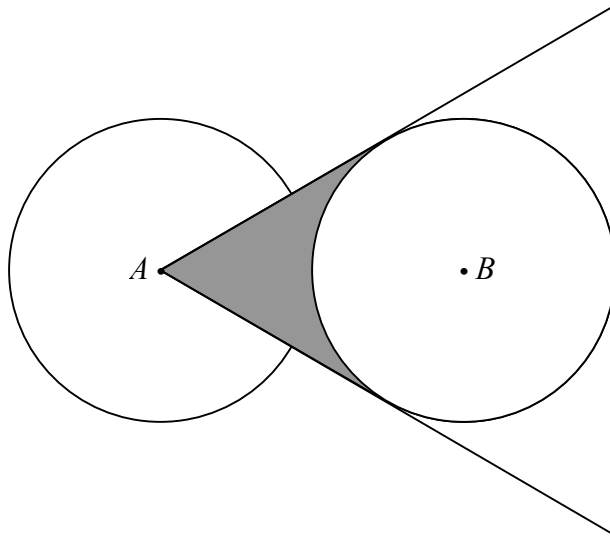
**Zadanie 11. (3 pkt)**

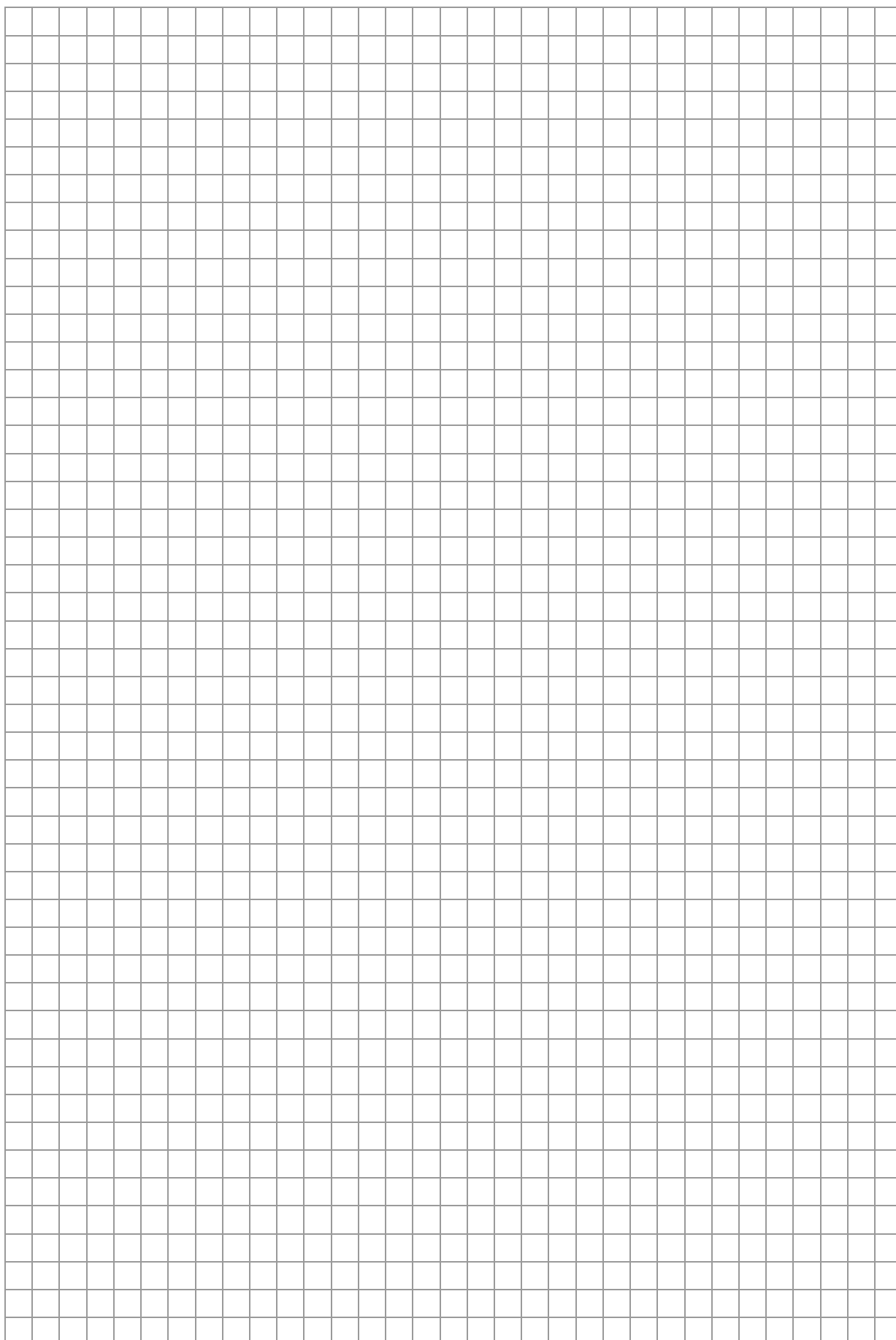
Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej  $n > 1$  największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność  $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$  o niewiadomej  $x$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$ .



**Zadanie 12. (4 pkt)**

Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).





**BRUDNOPIS**