Henryk Dąbrowski
Ewa Stożek

MATEMATYKA

PRZYKŁADOWY ARKUSZ DLA POZIOMU ROZSZERZONEGO

MATURA 2007

Publikacja współfinansowana
przez Europejski Fundusz Społeczny

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Łucka 11, 00-842 Warszawa
e-mail:

efs@cke.edu.pl

Centralna
Komisja
Egzaminacyjna

DODATEK

Przed Tobą zadania przykładowego arkusza egzaminacyjnego dla poziomu rozszerzonego. Przypominamy, że od sesji egzaminacyjnej 2007 roku na egzaminie maturalnym obowiązuje rozdzielenie poziomów zdawania, a warunkiem zaliczenia matury jest uzyskanie 30% punktów na wybranym poziomie. Zmierz się z tymi zadaniami i oceń, ile z nich potrafiłbyś bez trudu rozwiązać. Załączamy też schemat oceniania – możesz prześledzić, które elementy rozwiązania są punktowane.

Zadanie 1. (3 pkt)
Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{x^2-3}\left(x^3+4x^2-x-4\right)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Zadanie 2. (4 pkt)
Dana jest funkcja $f(x)=2\sin^2 x-1$, $x\in R$.
a) Narysuj wykres funkcji f.
b) Rozwiąż równanie $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

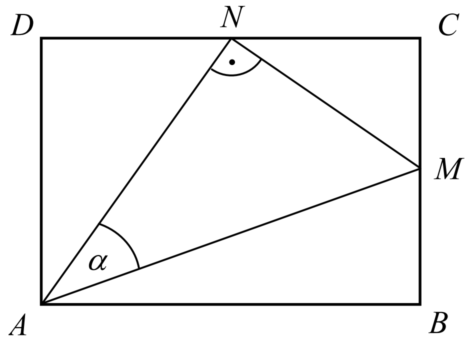
Zadanie 3. (4 pkt)
Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

Zadanie 4. (3 pkt)

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+3)(3n+4)(4n+5)}{(2n+1)(3n+2)(4n+3)(5n+4)}$.

Zadanie 5. (6 pkt)
Punkty M i N są środkami boków BC i CD prostokąta $ABCD$ (patrz rysunek) oraz $|\angle ANM|=90^\circ$.

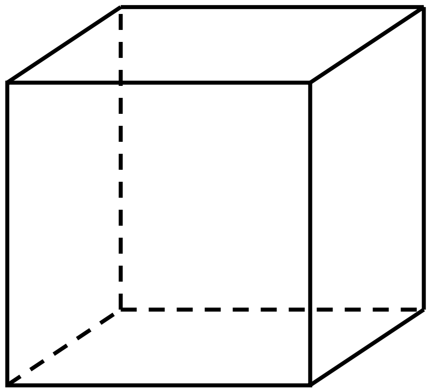
a) Oblicz stosunek długości dłuższego do długości krótszego boku prostokąta.
b) Uzasadnij, że $\alpha>30^\circ$.



Zadanie 6 (6 pkt)
Dane są nieskończone ciągi: arytmetyczny i geometryczny. Wszystkie wyrazy tych ciągów są liczbami naturalnymi dodatnimi. Iloraz ciągu geometrycznego jest pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, a różnica ciągu arytmetycznego jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego. Trzecie wyrazy tych ciągów są jednakowe. Wyznacz wzory ogólne tych ciągów.

Zadanie 7. (6 pkt)
Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem α.

a) Oblicz tangens największego z kątów α, dla którego przekrój ten jest trójkątem. Zaznacz ten kąt wraz z odpowiednim przekrojem na rysunku.



b) Otrzymany przekrój sześcianu jest trójkątem. Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że płaszczyzna, w której jest on zawarty podzieliła sześcian na dwie bryły, których stosunek objętości wynosi 1:11.

Zadanie 8. (5 pkt)
Wykaż, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi takimi, że $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ oraz $abc \neq 1$, to

$$\frac{1-\log_a b-\log_a c}{1+\log_a b+\log_a c}+\frac{1-\log_b c-\log_b a}{1+\log_b c+\log_b a}+\frac{1-\log_c a-\log_c b}{1+\log_c a+\log_c b}=-1 .$$

Zadanie 9. (8 pkt)
Dana jest parabola o równaniu $y=x^2-1$ i okrąg o równaniu $x^2+y^2=1$.

a) Wyznacz współrzędne wszystkich punktów wspólnych paraboli i okręgu.
b) Uzasadnij, że styczna do paraboli, poprowadzona przez dowolny punkt $P=\left(m,\ m^2-1\right)$ tej paraboli, ma równanie postaci $y=2mx-m^2-1$.
c) Wyznacz wszystkie wartości $m \in R$, dla których styczna $y=2mx-m^2-1$ do paraboli jest jednocześnie sieczną danego okręgu.

Zadanie 10. (5 pkt)
Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$.

a) Oblicz pochodną funkcji f.
b) Wyznacz ekstrema lokalne funkcji f.

Rozwiązanie zadania 1.
Z definicji logarytmu mamy:

$$\begin{cases} x^3+4x^2-x-4>0 \\ x^2-3>0 \\ x^2-3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+4)-(x+4)>0 \\ \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-1\right)(x+4)>0 \\ \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2-1\right)(x+4)>0 \\ \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0 \\ (x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x+4)>0 \\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right) \\ x\neq -2 \wedge x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-4,-1)\cup(1,+\infty) \\ x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right) \\ x\neq -2 \wedge x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

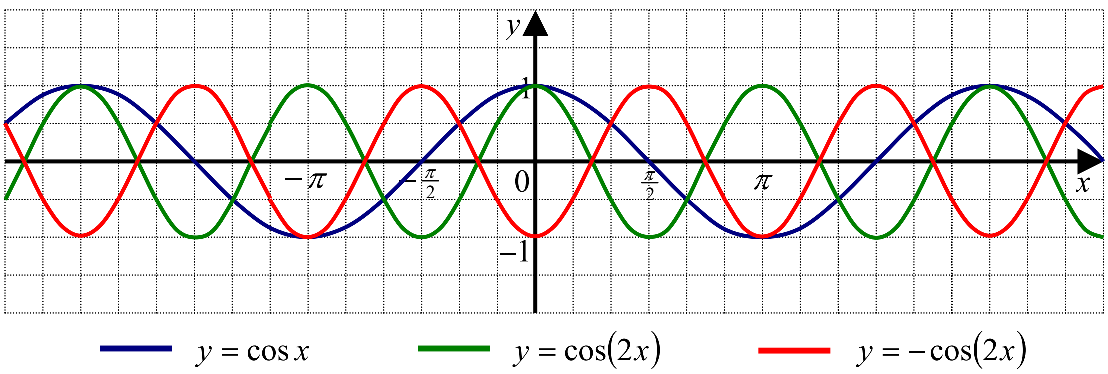
$$\Leftrightarrow x\in(-4,-2)\cup\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right)\cup(2,+\infty).$$

Zatem $D_f=(-4,-2)\cup\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},2\right)\cup(2,+\infty)$.

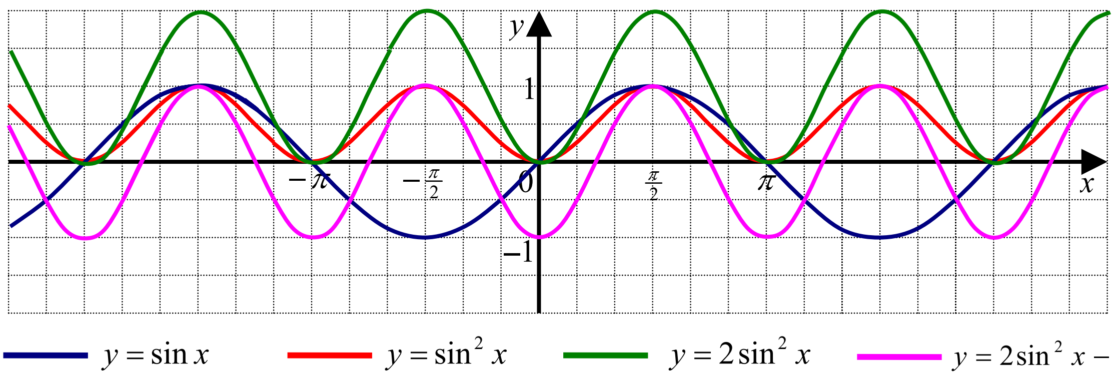
Rozwiązanie zadania 2.
a) Ponieważ dla każdego $x\in R$ jest prawdziwe:

$$2\sin^2 x-1=2\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\sin^2 x-\cos^2 x=-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=-\cos(2x),$$

(możemy też posłużyć się gotowym wzorem z *Zestawu wybranych wzorów matematycznych*, strona 14: $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$), więc $f(x)=-\cos(2x)$, $x\in R$.
Wykres funkcji *f* uzyskamy z wykresu funkcji o wzorze $y=\cos x$ zmieniając skalę względem osi *Oy* i tak przekształconą (okres zasadniczy funkcji zmniejszy się dwukrotnie) cosinusoidę odbijając symetrycznie względem osi *Ox*.



Uwaga. Wykres funkcji f można uzyskać również wykonując najpierw wykres funkcji o wzorze $y=\sin^2 x$, następnie zmieniając skalę względem osi *Ox* i tak przekształcony wykres („rozciągnięty w pionie") przesuwając o –1 w dół.



b)
I sposób.
Ponieważ wzór funkcji f możemy zapisać w prostszej postaci $f(x) = -\cos(2x)$, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$-\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in C \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ \ k\in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\ \ k\in C.$$

II sposób.
Równanie $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ możemy zapisać w postaci:

$$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0 \Leftrightarrow \sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow \left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \vee$$

$$\vee\, x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\quad k\in C \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\quad k\in C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},\quad k\in C.$$

Rozwiązanie zadania 3.
Zajmijmy się najpierw rzutem dwiema sześciennymi symetrycznymi kostkami.
Ω jest zbiorem wszystkich dwuwyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru sześcioelementowego.
$\overline{\overline{\Omega}}=36$.
Dokładnie 6 zdarzeń elementarnych sprzyja zdarzeniu A – na obu kostkach wypadła taka sama liczba oczek, więc $\overline{\overline{A}}=6$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.
Ponieważ n-krotne powtórzenie rzutu dwiema kostkami to schemat Bernoullego (poszczególne rzuty są niezależne), a sukcesem w pojedynczej próbie jest zajście zdarzenia A, więc prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu wynosi:

$$P_n(k\geq 1)=1-P_n(k=0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Wyznaczmy teraz wszystkie wartości $n\in N_+$, dla których

$$P_n(k\geq 1)<\frac{671}{1296} \Leftrightarrow 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n<\frac{671}{1296} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n>1-\frac{671}{1296} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{625}{1296} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n>\left(\frac{5}{6}\right)^4 \Leftrightarrow n<4.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie $n\in\{1, 2, 3\}$.

Rozwiązanie zadania 4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+3)(3n+4)(4n+5)}{(2n+1)(3n+2)(4n+3)(5n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)(2n+3)(3n+4)(4n+5)}{n^4}}{\frac{(2n+1)(3n+2)(4n+3)(5n+4)}{n^4}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2n+3}{n}\cdot\frac{3n+4}{n}\cdot\frac{4n+5}{n}}{\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+2}{n}\cdot\frac{4n+3}{n}\cdot\frac{5n+4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(4+\frac{3}{n}\right)\left(5+\frac{4}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{1}{5}.$$

Rozwiązanie zadania 5.

a)

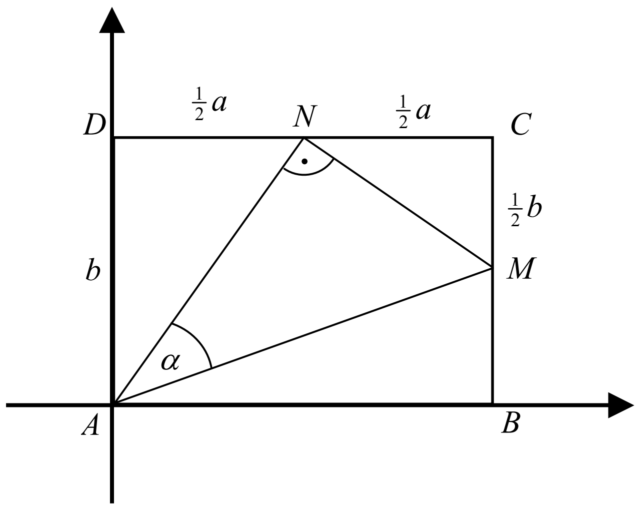
I sposób.

Oznaczmy a i b długość odpowiednio dłuższego i krótszego boku prostokąta. Niech $|\angle MNC|=\beta$, wtedy $|\angle NMC|=90^\circ-\beta$ oraz $|\angle AND|=90^\circ-\beta$, więc trójkąty NMC i AND są podobne. Stąd

$$\frac{|DN|}{|DA|}=\frac{|CM|}{|NC|}\Leftrightarrow\frac{\frac12 a}{b}=\frac{\frac12 b}{\frac12 a}\Leftrightarrow\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}b^2\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}=2,\text{ więc }\frac{a}{b}=\sqrt{2}.$$

II sposób.

Umieśćmy prostokąt w prostokątnym układzie współrzędnych jak na rysunku.



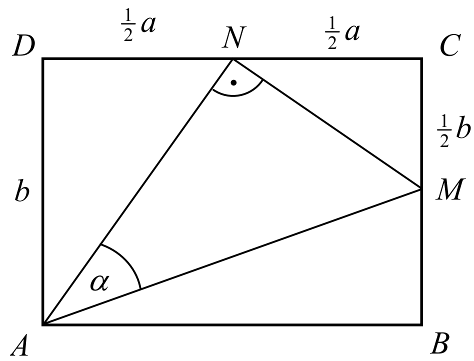
Wówczas $A=(0,\,0)$, $M=\left(a,\,\frac12 b\right)$, $N=\left(\frac12 a,\,b\right)$. Współczynniki kierunkowe prostych AN i MN wynoszą odpowiednio:

$$\frac{b-0}{\frac12 a-0}=\frac{2b}{a}\text{ oraz }\frac{b-\frac12 b}{\frac12 a-a}=\frac{\frac12 b}{-\frac12 a}=-\frac{b}{a}.$$

Ponieważ proste AN i MN są prostopadłe, więc iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1, a więc mamy:

$$\frac{2b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1\Leftrightarrow 2\left(\frac{b}{a}\right)^2=1\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2=2\text{ , a stąd }\frac{a}{b}=\sqrt{2}.$$

b)
I sposób
Z podobieństwa trójkątów *NMC* i *AND* otrzymujemy też
$$\frac{|MN|}{|AN|}=\frac{|CM|}{|DN|}=\frac{|CM|}{|NC|}=\frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a}=\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha=\frac{|MN|}{|AN|}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ$, więc stąd i z tego, że funkcja tangens jest rosnąca dla kątów ostrych wynika, że $\alpha>30^\circ$.

II sposób.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AND i ABM mamy odpowiednio
$$|AN|^2=|AD|^2+|DN|^2 \Leftrightarrow |AN|^2=b^2+\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2$$
oraz
$$|AM|^2=|AB|^2+|BM|^2 \Leftrightarrow |AM|^2=a^2+\left(\tfrac{1}{2}b\right)^2,$$
ale $a=b\sqrt{2}$, więc
$$|AN|=\sqrt{b^2+\left(\tfrac{1}{2}b\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{b^2+\tfrac{2}{4}b^2}=\tfrac{\sqrt{6}}{2}b \text{ oraz}$$
$$|AM|=\sqrt{\left(b\sqrt{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}b\right)^2}=\sqrt{2b^2+\tfrac{2}{4}b^2}=\tfrac{\sqrt{10}}{2}b.$$
Obliczmy teraz $\cos\alpha=\frac{|AN|}{|AM|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}b}{\frac{\sqrt{10}}{2}b}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$. Ponieważ $\frac{\sqrt{15}}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$, więc stąd i z tego, że w przedziale $(0^\circ, 90^\circ)$ funkcja cosinus jest malejąca, otrzymujemy $\alpha>30^\circ$.

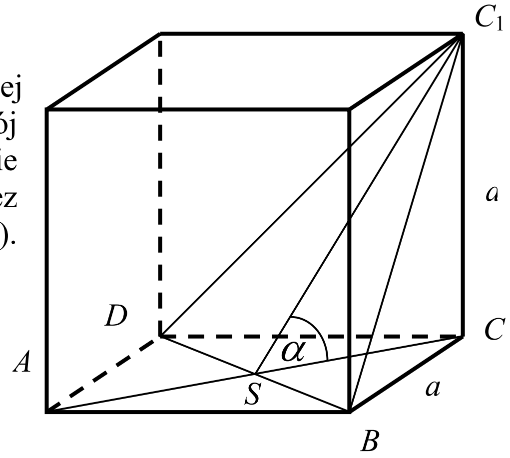
Rozwiązanie zadania 6.
Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r, (b_n)– nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q.
Wiemy, że $q=a_1$, $r=b_1$ i $a_3=b_3$. Ostatnią równość możemy więc zapisać w postaci:
$$a_1+2r=b_1q^2 \Leftrightarrow q+2r=rq^2 \Leftrightarrow r=\frac{q}{q^2-2}.$$
Ponieważ $r\in N_+$, więc $\frac{q}{q^2-2}\in N_+$. Oczywiście $q>0$, bo $q=a_1\in N_+$. Oczywiste jest też, że $q>1$, bo gdyby $q=1$, to wtedy $r=\frac{1}{1^2-2}=-1$, co niemożliwe. Wynika stąd, że $q\geq 2$. Gdyby $q>2$, to wtedy $q(q-1)>2$, ale to oznaczałoby, że $q^2-q>2 \Leftrightarrow q^2-2>q$, a stąd $\frac{q}{q^2-2}<1$ czyli $r<1$, co jest niemożliwe. Ostatecznie otrzymujemy, że jedynie $q=2$, wtedy $r=1$. Zatem $a_1=2$ i $b_1=1$, więc wzory ogólne tych ciągów mają postać:
$a_n=1+(n-1)\cdot 1=n+1$, $b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$, gdzie $n\in N_+$.

Rozwiązanie zadania 7.

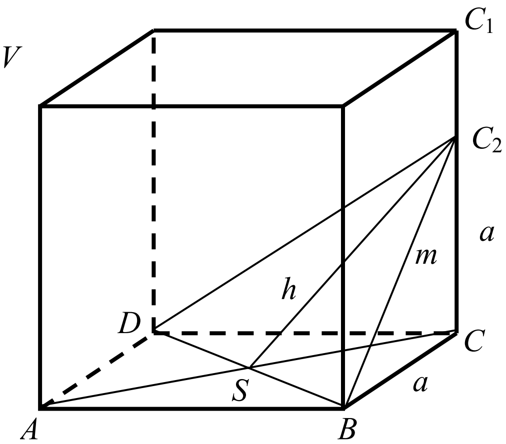
a)

Największy kąt nachylenia płaszczyzny zawierającej przekątną podstawy sześcianu, przy którym przekrój wyznaczony przez tę płaszczyznę jest trójkątem będzie wtedy, gdy płaszczyzna będzie przechodziła przez wierzchołek C_1 górnej podstawy (patrz rysunek). Wtedy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|CC_1|}{|SC|} = \frac{a}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



b)



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$V_{BCDC_2} = \frac{1}{12}V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot m = \frac{1}{12}a^3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}a$, gdzie V – objętość sześcianu.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CC_2 S mamy:

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Zatem pole szukanego przekroju wynosi:

$$P_{BC_2D} = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Rozwiązanie zadania 8.

Dowód. Niech a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a, b, c, abc \in R^+ \setminus \{1\}$. Wtedy z definicji logarytmu mamy $1 = \log_a a = \log_b b = \log_c c$, więc

$$\frac{1-\log_a b - \log_a c}{1+\log_a b + \log_a c} + \frac{1-\log_b c - \log_b a}{1+\log_b c + \log_b a} + \frac{1-\log_c a - \log_c b}{1+\log_c a + \log_c b} =$$

$$= \frac{\log_a a - \log_a b - \log_a c}{\log_a a + \log_a b + \log_a c} + \frac{\log_b b - \log_b c - \log_b a}{\log_b b + \log_b c + \log_b a} + \frac{\log_c c - \log_c a - \log_c b}{\log_c c + \log_c a + \log_c b} =$$

wykorzystując teraz twierdzenia o sumie logarytmów i o różnicy logarytmów, możemy to wyrażenie zapisać w postaci:

$$= \frac{\log_a \frac{a}{bc}}{\log_a(abc)} + \frac{\log_b \frac{b}{ca}}{\log_b(abc)} + \frac{\log_c \frac{c}{ab}}{\log_c(abc)} =$$

to wyrażenie natomiast możemy, po wykorzystaniu twierdzenia o zamianie podstaw logarytmu, zapisać w postaci:

$$= \log_{abc}\frac{a}{bc} + \log_{abc}\frac{b}{ca} + \log_{abc}\frac{c}{ab} =$$

ponownie wykorzystując wzór na sumę logarytmów otrzymujemy

$$= \log_{abc}\left(\frac{a}{bc}\cdot\frac{b}{ca}\cdot\frac{c}{ab}\right) = \log_{abc}\frac{abc}{(abc)^2} = \log_{abc}(abc)^{-1} =$$

wykorzystując teraz twierdzenie o logarytmie potęgi i definicję logarytmu otrzymujemy

$= -\log_{abc}(abc) = -1$. Co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania 9.

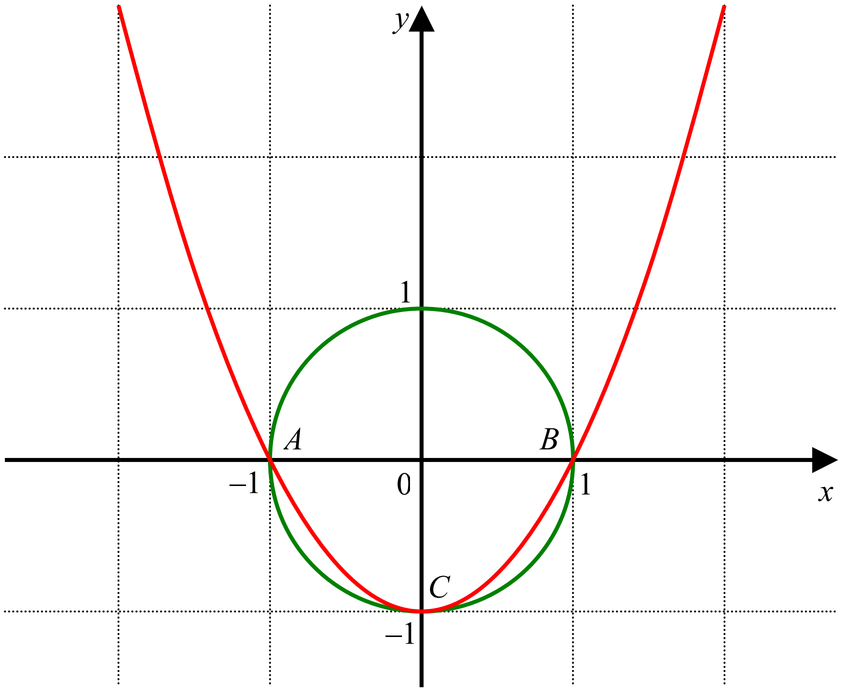
a) Aby wyznaczyć współrzędne wszystkich punktów wspólnych paraboli i okręgu wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y + 1 \\ (y+1) + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y = 0 \vee y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Są zatem 3 punkty wspólne okręgu i paraboli: $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ i $C = (0, -1)$.

Możemy również wyznaczyć punkty wspólne obu krzywych rysując parabolę i okrąg w tym samym układzie współrzędnych:



Odczytujemy współrzędne punktów wspólnych obu krzywych:
$A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ i $C = (0, -1)$.
Następnie wykonujemy odpowiednie sprawdzenia dla każdej z odczytanych par.

b)
I sposób.
Prosta k o równaniu $y = 2mx - m^2 - 1$ jest styczna do paraboli o równaniu $y = x^2 - 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2mx - m^2 - 1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdyż prosta k nie jest równoległa do osi symetrii paraboli dla żadnej wartości $m \in R$. Stąd otrzymujemy równanie:

$$x^2 - 1 = 2mx - m^2 - 1,$$

które też musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie.

$$x^2 - 1 = 2mx - m^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 0 \Leftrightarrow x = m,$$

a to kończy uzasadnienie.

II sposób

Weźmy dowolny punkt $P=\left(m,\ m^2-1\right)$ leżący na paraboli. Oznaczmy symbolem f funkcję, której wykresem jest ta parabola. $f'(x)=2x$ dla $x\in R$, więc $f'(m)=2m$. Stąd, po wykorzystaniu równania stycznej, otrzymujemy, że styczna do danej paraboli przechodząca przez punkt P ma równanie:

$$y-\left(m^2-1\right)=2m\cdot(x-m) \text{ czyli } y=2mx-m^2-1,$$

co właśnie należało uzasadnić.

c)

I sposób.

Na to, aby prosta k o równaniu $y=2mx-m^2-1$ była sieczną okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$ potrzeba i wystarcza, żeby środek $S=(0,\ 0)$ tego okręgu był odległy o mniej niż $r=1$ od tej prostej. Ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$odl(S,k)<r\Leftrightarrow \frac{\left|2m\cdot 0-0-m^2-1\right|}{\sqrt{(2m)^2+(-1)^2}}<1\Leftrightarrow \frac{\left|-m^2-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}<1\Leftrightarrow \frac{m^2+1}{\sqrt{4m^2+1}}<1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2+1<\sqrt{4m^2+1}\Leftrightarrow \left(m^2+1\right)^2<4m^2+1\Leftrightarrow m^4+2m^2+1<4m^2+1\Leftrightarrow$$

$$m^4-2m^2<0\Leftrightarrow m^2\left(m^2-2\right)<0\Leftrightarrow m\neq 0\wedge m^2-2<0\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \sqrt{2}\right)$$

II sposób.

Na to aby prosta k o równaniu $y=2mx-m^2-1$ była sieczną okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$ potrzeba i wystarcza, żeby układ równań:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=2mx-m^2-1 \end{cases}$$

miał dwa rozwiązania. Stąd otrzymujemy równanie:

$$x^2+\left(2mx-m^2-1\right)^2=1\Leftrightarrow \left(4m^2+1\right)x^2-4m\left(m^2+1\right)x+m^2\left(m^2+2\right)=0.$$

Ponieważ dla każdej wartości $m\in R$ równanie to jest kwadratowe z niewiadomą x, więc wystarczy, aby równanie to miało dwa rozwiązania, a tak będzie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta>0\Leftrightarrow \left[-4m\left(m^2+1\right)\right]^2-4\left(4m^2+1\right)\left[m^2\left(m^2+2\right)\right]>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16m^2\left(m^4+2m^2+1\right)-4m^2\left(4m^2+1\right)\left(m^2+2\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2\left[4\left(m^4+2m^2+1\right)-\left(8m^4+9m^2+2\right)\right]>0\Leftrightarrow 4m^2\left(2-m^2\right)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m\neq 0\wedge 2-m^2>0\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{2},\ 0\right)\cup\left(0,\ \sqrt{2}\right).$$

Rozwiązanie zadania 10.

a) $D_f=R\setminus\{2\}$, $f'(x)=\dfrac{3x^2\cdot(x-2)-1\cdot x^3}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}$, $D_{f'}=R\setminus\{2\}$.

b) Wyznaczmy najpierw miejsca zerowe pochodnej:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow 2x^3-6x^2=0\wedge x\neq 2\Leftrightarrow 2x^2(x-3)=0\wedge x\neq 2\Leftrightarrow$$

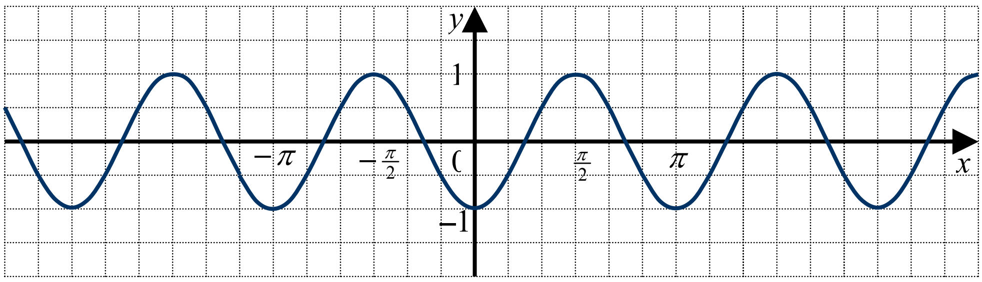
$$\Leftrightarrow x=0\vee x=3.$$

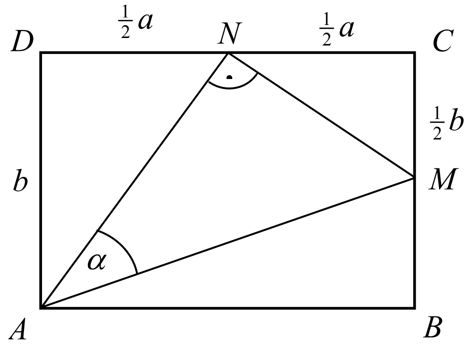
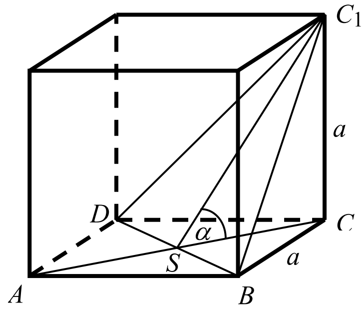
Ponieważ $(x-2)^2>0$ dla każdego $x\neq 2$, więc:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 > 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow 2x^2(x-3) > 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x - 3 > 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x > 3$,
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 < 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow 2x^2(x-3) < 0 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x - 3 < 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3)$.

W punkcie $x = 0$ jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji, ale nie jest spełniony warunek wystarczający (pochodna „nie zmienia znaku przy przejściu przez ten punkt”), w punkcie $x = 3$ jest spełniony warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego. Zatem funkcja f posiada tylko jedno ekstremum lokalne w punkcie $x = 3$ i jest to minimum lokalne: $f_{\min}(3) = 27$.

Schematy punktowania zadań

Nr	Etapy rozwiązania	PKT
1.1	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których liczba logarytmowana jest dodatnia: $x\in(-4,\,-1)\cup(1,+\infty)$.	1
1.2	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1: $x\in(-\infty,\,-2)\cup\left(-2,\,-\sqrt{3}\,\right)\cup\left(\sqrt{3},\,2\right)\cup(2,\,+\infty)$.	1
1.3	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $x\in(-4,\,-2)\cup\left(-2,\,-\sqrt{3}\,\right)\cup\left(\sqrt{3},\,2\right)\cup(2,\,+\infty)$.	1
2.1	Zapisanie wzoru funkcji w postaci $f(x)=-\cos(2x)$ lub narysowanie wykresu funkcji $y=\sin^2 x$.	1
2.2	Naszkicowanie wykresu funkcji f: 	1
2.3	Rozwiązanie równania (po 1 pkt za otrzymanie równania lub alternatywy równań elementarnych 1 pkt za jego/ich rozwiązanie): $x=\frac{7\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}$, gdzie $k\in C$.	2
3.1	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w jednym rzucie tej samej liczby oczek na obu kostkach: $p=\frac{1}{6}$.	1
3.2	Wykorzystanie schematu Bernoullego i określenie: p, q, N, k: $p=\frac{1}{6}, q=\frac{5}{6} N=n, k\geq 1$.	1
3.3	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w n rzutach co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach: $P_n(k\geq 1)=1-P_n(0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.	1
3.4	Rozwiązanie nierówności wykładniczej i sformułowanie odpowiedzi: $n\in\{1,\,2,\,3\}$.	1
4.1	Zapisanie wyrażenia pod znakiem granicy w postaci: $\dfrac{\frac{(n+2)(2n+3)(3n+4)(4n+5)}{n^4}}{\frac{(2n+1)(3n+2)(4n+3)(5n+4)}{n^4}}$ lub $\dfrac{\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2n+3}{n}\cdot\frac{3n+4}{n}\cdot\frac{4n+5}{n}}{\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+2}{n}\cdot\frac{4n+3}{n}\cdot\frac{5n+4}{n}}$ albo $\dfrac{\frac{24n^4+146n^3+429n^2+326n+120}{n^4}}{\frac{120n^4+326n^3+429n^2+146n+24}{n^4}}$.	1
4.2	Zapisanie wyrażenia pod znakiem granicy w postaci: $\dfrac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{4}{n}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(4+\frac{3}{n}\right)\left(5+\frac{4}{n}\right)}$ lub $\dfrac{24+\frac{146}{n}+\frac{429}{n^2}+\frac{326}{n^3}+\frac{120}{n^4}}{120+\frac{326}{n}+\frac{429}{n^2}+\frac{146}{n^3}+\frac{24}{n^4}}$.	1
4.3	Obliczenie granicy: $\frac{1}{5}$.	1

5.1	Uzasadnienie, że trójkąty *AND* i *ABM* są podobne. 	1
5.2	Zapisane zależności między wielkościami a i b – długościami odpowiednio dłuższego i krótszego boku prostokąta: np. $\frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a}$.	1
5.3	Obliczenie stosunku długości dłuższego do długości krótszego boku prostokąta: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.	1
5.4	Obliczenie wartości jednej z funkcji trygonometrycznych kata α : np. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	1
5.5	Porównanie uzyskanej wartości funkcji trygonometrycznej z odpowiednią wartością tej funkcji kata $30°$: np. $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}30°$.	1
5.6	Uzasadnienie, że $\alpha > 30°$ np. poprzez powołanie się na monotoniczność funkcji trygonometrycznej dla kątów ostrych.	1
6.1	Przyjęcie oznaczeń i zapisanie warunków zadania, np.: (a_n) – nieskończony ciąg arytmetyczny o różnicy r, (b_n)– nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q, $q = a_1$, $r = b_1$ i $a_3 = b_3$, $a_n \in N_+$, $b_n \in N_+$.	1
6.2	Wykorzystanie wzorów ogólnych ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego i zapisanie zależności $a_3 = b_3$ w postaci $a_1 + 2r = b_1 q^2$.	1
6.3	Zapisanie zależności między q i r w postaci: $r = \frac{q}{q^2 - 2}$.	1
6.4	Uzasadnienie, że otrzymana równość zachodzi tylko dla $q = 2$ i $r = 1$.	2
6.5	Zapisanie wzorów ogólnych ciągów: $a_n = n + 1$, $b_n = 2^{n-1}$, gdzie $n \in N_+$.	1
7.1	a) Narysowanie przekroju i zaznaczenie szukanego kąta: 	1

7.2	Obliczenie tangensa kąta α: $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{2}$.	1
7.3	b) Zapisanie zależności między objętością sześcianu i objętością mniejszej z części podziału: $V_{BCDC_2} = \frac{1}{12}V$, gdzie V – objętość sześcianu.	1
7.4	Obliczenie wysokości ostrosłupa prostokątnego BC_2D: $m = \frac{1}{2}a$.	1
7.5	Obliczenie wysokości przekroju BC_2D: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	
7.6	Obliczenie pola przekroju: $P_{BC_2D} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.	
8.1	Zastosowanie definicji logarytmu i zapisanie lewej strony równości w postaci: $\frac{\log_a a - \log_a b - \log_a c}{\log_a a + \log_a b + \log_a c} + \frac{\log_b b - \log_b c - \log_b a}{\log_b b + \log_b c + \log_b a} + \frac{\log_c c - \log_c a - \log_c b}{\log_c c + \log_c a + \log_c b}$.	1
8.2	Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę logarytmów i zapisanie lewej strony równości w postaci: $\frac{\log_a \frac{a}{bc}}{\log_a(abc)} + \frac{\log_b \frac{b}{ca}}{\log_b(abc)} + \frac{\log_c \frac{c}{ab}}{\log_c(abc)}$.	1
8.3	Wykorzystanie twierdzenia o zamianie podstaw logarytmu i zapisanie lewej strony równości w postaci: $\log_{abc}\frac{a}{bc} + \log_{abc}\frac{b}{ca} + \log_{abc}\frac{c}{ab}$.	1
8.4	Doprowadzenie lewej strony równości do postaci: $\log_{abc}(abc)^{-1}$.	1
8.5	Wykorzystanie wzoru na logarytm potęgi oraz definicji logarytmu i doprowadzenie lewej strony równości do postaci (-1).	1
9.1	a) Zapisanie układu równań $y = x^2 - 1 \wedge x^2 + y^2 = 1$ w postaci równoważnej, w której jedno z równań to równanie z jedną niewiadomą, np.: $\begin{cases} x^2 = y + 1 \\ y^2 + y = 0 \end{cases}$.	1
9.2	Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.	1
9.3	b) Zapisanie warunku na to, aby prosta k była styczna do paraboli $y = x^2 - 1$: np układ równań $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2mx - m^2 - 1 \end{cases}$ musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie.	1
9.4	Doprowadzenie układu do postaci równania kwadratowego z jedną niewiadomą: $x^2 - 2mx + m^2 = 0$.	1
9.5	Rozwiązanie równania: $x = m$.	1
9.6	c) Zapisanie warunku na to, aby prosta k była sieczną okręgu, np.: $odl(S,k) < r$, gdzie $S = (0,\ 0)$ to środek okręgu, natomiast r – jego promień.	1
9.7	Zapisanie warunku w postaci równania z niewiadomą m, np.: $\frac{m^2+1}{\sqrt{4m^2+1}} < 1$.	1
9.8	Wyznaczenie wszystkich szukanych wartości parametru m: $m \in \left(-\sqrt{2},\ 0\right) \cup \left(0,\ \sqrt{2}\right)$.	1

10.1	Zapisanie dziedziny funkcji f: $D_f = R \setminus \{2\}$.	1
10.2	Obliczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}$, $D_{f'} = R \setminus \{2\}$.	1
10.3	Obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $x = 0 \vee x = 3$.	1
10.4	Uzasadnienie, że funkcja f posiada tylko jedno ekstremum lokalne – minimum w punkcie $x = 3$. (np. stwierdzenie że w punkcie $x = 0$ jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji, ale nie jest spełniony warunek wystarczający, albo zaznaczenie znaków pochodnej)	1
10.5	Obliczenie minimum lokalnego funkcji f: $f_{\min}(3) = 27$.	1

Uwaga. Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą (zgodną z poleceniem) od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zwróciłeś zapewne uwagę na to, że pokazujemy wiele sposobów rozwiązania, mimo że w schemacie nie są one uwzględnione. Podstawowa wersja schematu zazwyczaj dotyczy jednego sposobu rozwiązania, dopiero wersja dla egzaminatorów jest poszerzana o różne wersje rozwiązania, również te, które pojawią się w trakcie sprawdzania prac egzaminacyjnych.

Przedstawiony arkusz jest przeznaczony dla zdających poziom rozszerzony, jednak znajdują się w nim zadania, które może rozwiązać zdający, który realizował jedynie podstawowy kurs matematyki w szkole. Do zadań tych należą 5 i 6. Są to zadania badające umiejętności z zakresu standardu II i III. Wśród zadań znajdują się też takie, które dotyczą treści z poziomu rozszerzonego, ale są zadaniami typowymi badającymi umiejętności nie wykraczające poza II standard wymagań egzaminacyjnych. Takimi zadaniami w przedstawionym arkuszu są zadania 1, 2, 10 oraz 9a) i 9b).

Życzymy powodzenia na maturze

Autorzy