CZĘŚĆ MATEMATYCZNO - PRZYRODNICZA
MATEMATYKA

W niniejszej publikacji przedstawiono osiągnięcia uczniów rozwiązujących zadania z matematyki **w arkuszu standardowym**, którzy ukończyli gimnazjum w roku 2014, w szkołach na terenie działania Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Poznaniu, tj. w gimnazjach w województwach: lubuskim, wielkopolskim i zachodniopomorskim.
Dane statystyczne, dotyczące wyników egzaminu gimnazjalnego w 2014 r., podano w raporcie zamieszczonym na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.

Arkusz standardowy (GM-M1-142) zawierał 23 zadania, w tym 20 zadań zamkniętych i 3 zadania otwarte. Wśród zadań zamkniętych dominowały zadania wielokrotnego wyboru (16 zadań), w których uczeń wybierał jedną z czterech podanych odpowiedzi. W trzech zadaniach uczeń oceniał podane stwierdzenia, w jednym wybierał odpowiedź Tak lub Nie oraz jej uzasadnienie. Zadania otwarte (21., 22. i 23.) wymagały od gimnazjalisty samodzielnego sformułowania rozwiązania.
Za rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł uzyskać maksymalnie 28 punktów (100%); w tym za każde zadanie zamknięte po jednym punkcie (razem 20 pkt), a za trzy zadania otwarte 8 punktów (zad. 21. – 2 pkt, zad. 22. – 2 pkt, zad. 23. – 4 pkt).

Za pomocą zadań sprawdzano, na jakim poziomie gimnazjaliści opanowali wymagania ogólne i szczegółowe z matematyki, określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III etapu edukacyjnego oraz – w myśl zasady kumulatywności przyjętej w podstawie – odnosiły się również do wymagań przypisanych wcześniejszym etapom edukacyjnym (I i II).

Wyniki uzyskane przez uczniów (w kraju, Okręgu i województwach) za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki zestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1. Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki

w kraju	w Okręgu	w województwie		
		lubuskim	wielkopolskim	zachodniopomorskim
47%	45,86%	46,72%	46,79%	43,93%

Uczniowie w województwie wielkopolskim i lubuskim osiągnęli wyniki wyższe od średniego wyniku w Okręgu (odpowiednio o około 0,93 p.p i 0,86 p.p) oraz porównywalne ze średnim wynikiem w kraju. Gimnazjaliści w województwie zachodniopomorskim uzyskali średni wynik niższy od wyniku w Okręgu (o około 1,93 p.p.) oraz w kraju (o około 3,07 p.p.).

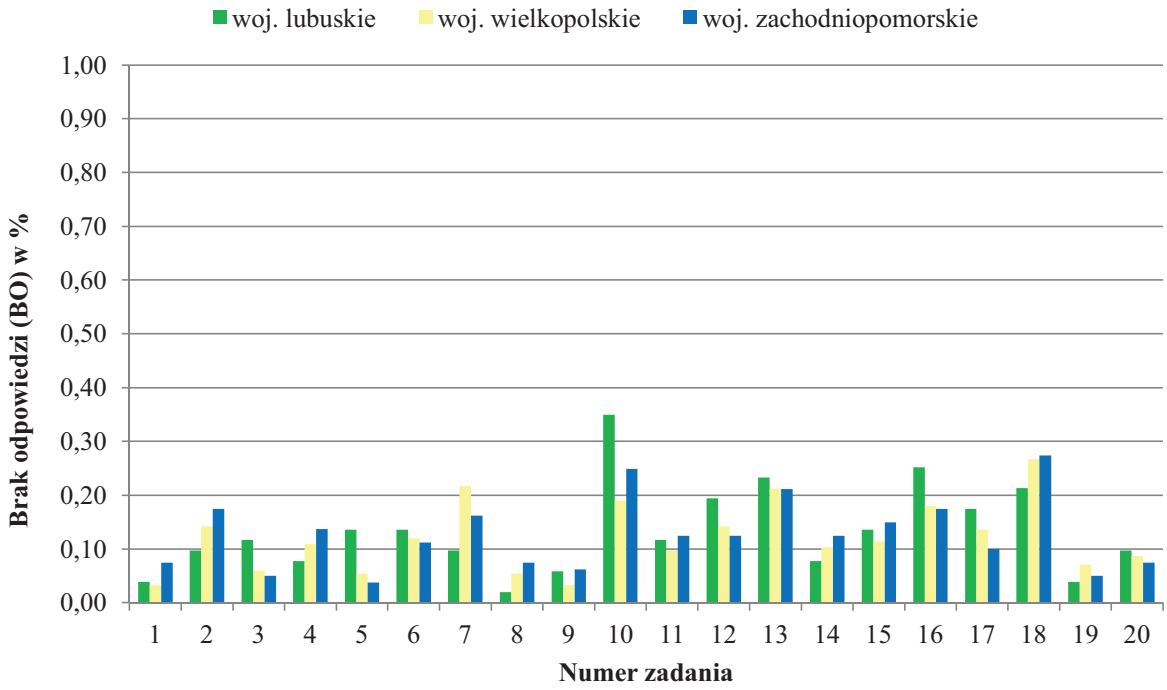
Na kolejnych stronach zaprezentowano analizę wyników, uzyskanych za rozwiązanie poszczególnych zadań, która dostarcza szczegółowych informacji, dotyczących mocnych i słabych stron wykształcenia matematycznego gimnazjalistów.
Wyniki analizowano z podziałem na zadania zamknięte i otwarte w odniesieniu do podstawy programowej oraz z uwzględnieniem:
- stopnia trudności zadań,
- braku odpowiedzi oraz wielokrotnych zaznaczeń odpowiedzi,
- wybieralności odpowiedzi.

ANALIZA POZIOMU OPANOWANIA UMIEJĘTNOŚCI

1. Czynniki statystyczne mające wpływ na poziom osiągnięć uczniowskich

Analizę osiągnięć gimnazjalistów rozpoczynamy od przedstawienia, jaki procent uczniów nie zaznaczył odpowiedzi do zadań zamkniętych, a jaki procent wskazał kilka odpowiedzi do jednego zadania. W obu przypadkach skutkowało to otrzymaniem zera punktów za dane zadanie.

Jak liczne były to grupy trzecioklasistów w poszczególnych województwach, przedstawiono na wykresie 1.

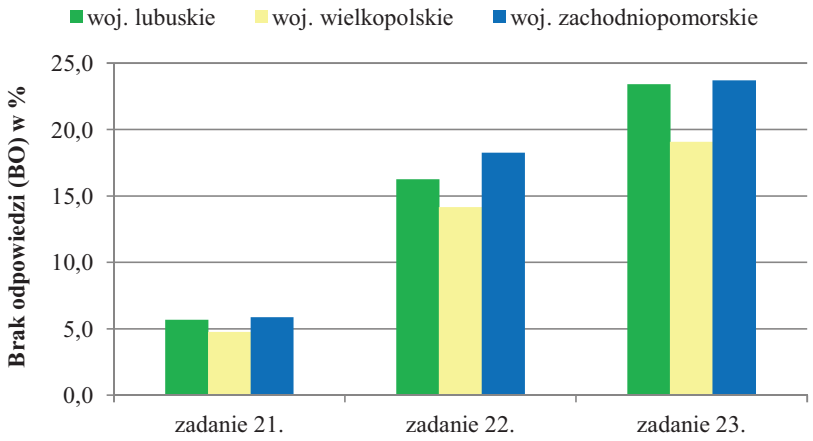


Wykres 1. *Procent uczniów, którzy nie zaznaczyli odpowiedzi do zadań zamkniętych z matematyki*

W każdym województwie brak zaznaczenia odpowiedzi dotyczy wszystkich zadań w arkuszu. Podczas tegorocznego egzaminu z matematyki frakcja opuszczeń w zadaniach zamkniętych była niewielka, nie przekroczyła 0,35% populacji. Najwyższą frakcję (0,35%) opuszczeń odnotowano w województwie lubuskim w zdaniu 10., w którym za pomocą wyrażenia algebraicznego należało zapisać związek między długością odcinka x dla wzoru złożonego z n płytek. W województwie wielkopolskim i województwie zachodniopomorskim najwyższa frakcja opuszczeń wystąpiła w zadaniu 18. (0,27%), w którym należało obliczyć objętość graniastosłupa. Zadanie 10. oraz zadanie 18. były typowymi zadaniami wielokrotnego wyboru, z jedną poprawną odpowiedzią.

Istotny wpływ na średni wynik, uzyskany za rozwiązanie poszczególnych zadań, jak i średni wynik dla całego arkusza, ma frakcja opuszczeń zadań otwartych (wielopunktowych), którą interpretujemy jako niepodjęcie próby rozwiązania zadania.

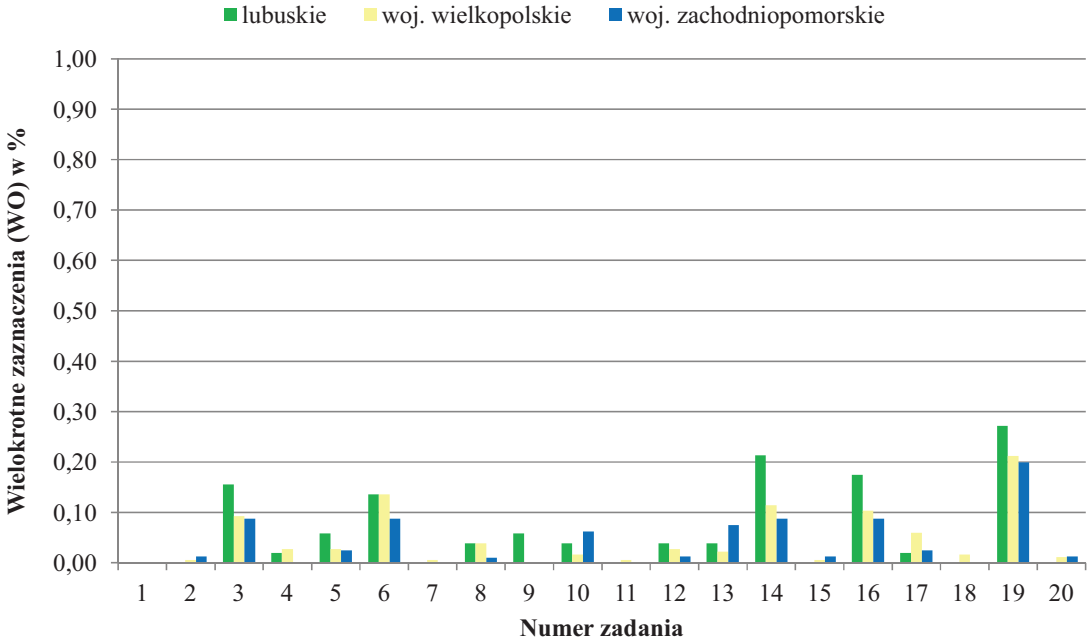
Na wykresie 2. przedstawiono, ilu uczniów w poszczególnych województwach nie podjęło próby rozwiązania zadań otwartych.



Wykres 2. *Procent piszących, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania otwartego z matematyki*

Na podstawie analizy wykresu należy stwierdzić, że:
- zachodniopomorscy gimnazjaliści częściej niż zdający z innych województw nie podjęli próby rozwiązania zadań otwartych,
- w każdym województwie największy odsetek uczniów nie podjął próby rozwiązania zadania 23, w którym wymagano obliczenia pola powierzchni powstałej bryły.

Czynnikiem, wpływającym na otrzymane wyniki, jest także zaznaczenie więcej niż jednej odpowiedzi do zadań zamkniętych. Rozkład wielokrotnych zaznaczeń dla poszczególnych zadań w trzech województwach przedstawiono na wykresie 3.



Wykres 3. *Procent piszących, którzy zaznaczyli kilka odpowiedzi do jednego zadania zamkniętego z matematyki*

Wielokrotne zaznaczenia odpowiedzi, w każdym województwie, najczęściej wystąpiły w zadaniach 3., 6., 14., 16., i 19. W trzech zadaniach uczeń oceniał podane stwierdzenia (prawda-fałsz), w jednym odpowiadał na pytanie (Tak lub Nie) i wskazywał poprawne uzasadnienie odpowiedzi (1., 2. lub 3.).

2. Analiza poziomu opanowania umiejętności ogólnych

Analizę poziomu opanowania wiadomości i umiejętności z zakresu matematyki przeprowadzono wykorzystując współczynniki łatwości.

Poniżej podano wykaz wymagań ogólnych, zapisanych w podstawie programowej z zakresu matematyki i sprawdzanych na egzaminie gimnazjalnym.

Wymaganie ogólne **I.** – **Wykorzystywanie i tworzenie informacji.**

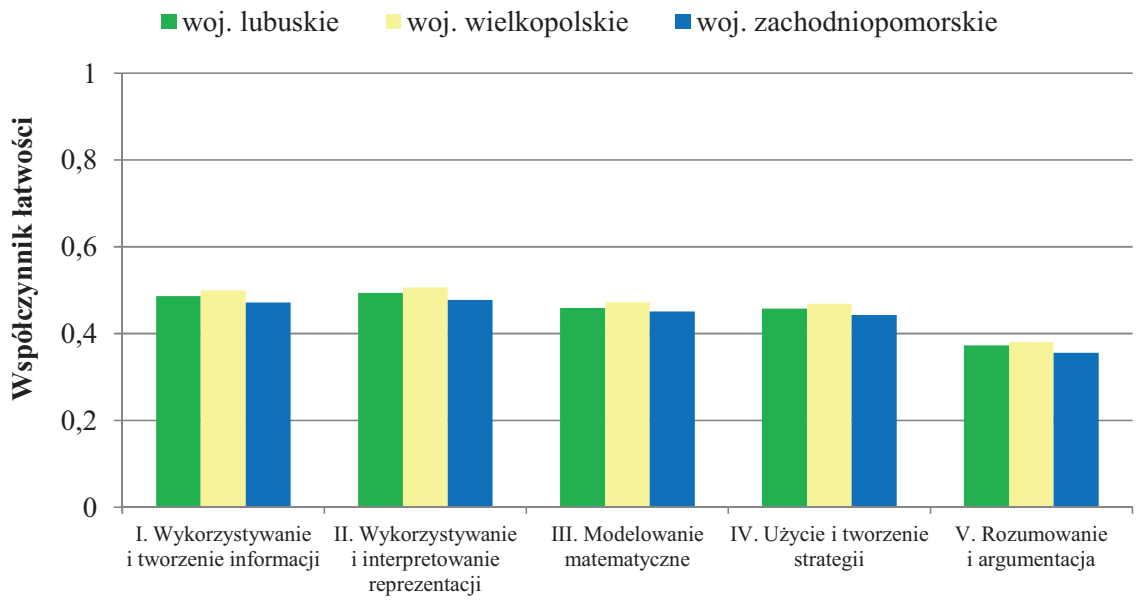
Wymaganie ogólne **II.** – **Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.**

Wymaganie ogólne **III.** – **Modelowanie matematyczne.**

Wymaganie ogólne **IV.** – **Użycie i tworzenie strategii.**

Wymaganie ogólne **V.** – **Rozumowanie i argumentacja.**

Na wykresie 4. przedstawiono poziom opanowania wiadomości i umiejętności z zakresu wymagań ogólnych z matematyki w poszczególnych województwach (do zobrazowania zagadnienia wykorzystano wskaźniki łatwości).

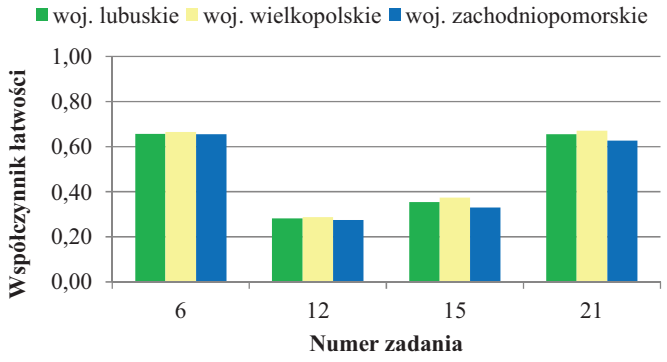


Wykres 4. *Poziom opanowania wymagań ogólnych z matematyki*

Na podstawie analizy wykresu można stwierdzić, że żadne z wymagań ogólnych nie zostało przez gimnazjalistów opanowane na poziomie zadowalającym. Najtrudniejsze okazało się wykorzystywanie i tworzenie strategii oraz rozumowanie i argumentacja. Gimnazjaliści w województwie wielkopolskim opanowali wymagania ogólne w nieznacznie wyższym stopniu niż ich rówieśnicy w pozostałych województwach Okręgu. Poziom oraz zróżnicowanie osiągnięć uczniów, ujętych w pięciu wymaganiach ogólnych z zakresu matematyki[1], przedstawiono na wykresach 5. - 9.

[1] Jeżeli za pomocą zadania sprawdzano dwa wymagania ogólne, zadanie zostało przypisane i ujęte w obu wymaganiach (np. zadanie 15. – wymaganie I i II).

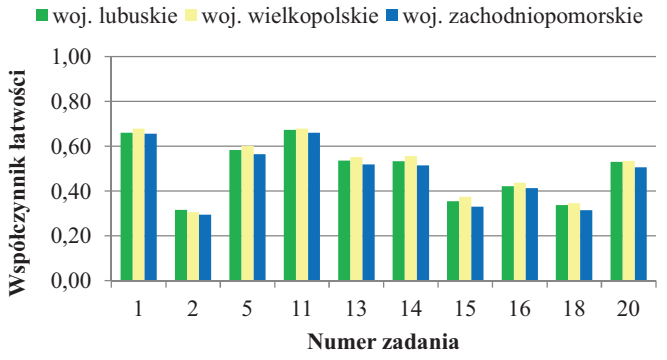
Wykorzystywanie i tworzenie informacji



Wykres 5. *Poziom osiągnięć uczniów z zakresu wykorzystania i tworzenia informacji.*

Interpretowanie i tworzenie tekstów matematycznych oraz używanie języka matematycznego do opisu rozumowania okazało się dla gimnazjalistów w województwie lubuskim i zachodniopomorskim trudne, dla gimnazjalistów w województwie wielkopolskim – umiarkowanie trudne. W tym zakresie najwyższy poziom opanowania umiejętności odnotowano dla dwóch zadań: w zadaniu 6.oraz 21., w których gimnazjaliści wykorzystywali informacje podane w tekście lub na rysunku, a następnie wykonywali obliczenia w celu rozwiązania problemu. Znacznie trudniejsze okazały się zadania wymagające od ucznia łączenia różnych umiejętności matematycznych (12.,15.).

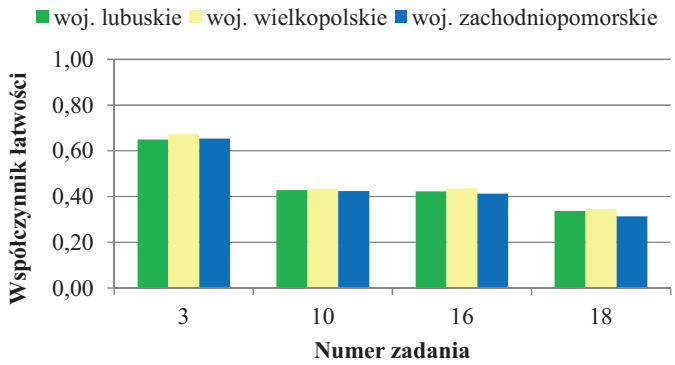
Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji



Wykres 6. *Poziom osiągnięć uczniów z zakresu wykorzystania i interpretowania reprezentacji.*

Umiarkowanie trudne były dla uczniów umiejętności złożone związane z używaniem prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych i operowaniem nimi. Uczniowie nadal mają kłopoty z poprawnym wykonywaniem obliczeń na liczbach wymiernych, głównie z obliczeniami procentowymi) oraz stosowaniem definicji i twierdzeń w typowych kontekstach. Najtrudniejsze okazało się operowanie pojęciem objętości graniastosłupa.

Modelowanie matematyczne

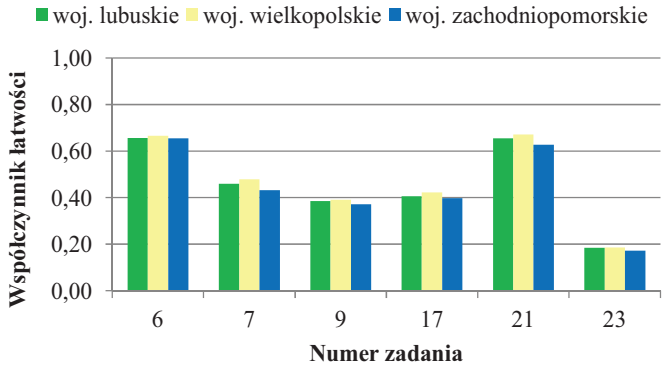


Wykres 7. *Poziom osiągnięć uczniów z zakresu modelowania matematycznego.*

Dobieranie bądź budowanie modelu matematycznego do opisanej sytuacji, szczególnie praktycznej, okazało się dla gimnazjalistów trudne. Najmniej trudności wystąpiło przy ocenie zdań, w których opisano zależności wprost i odwrotnie proporcjonalne.

Najwięcej trudności wystąpiło w zadaniach, do rozwiązania których uczniowie wykorzystywali kilka umiejętności (głównie rozumowanie i argumentacja).

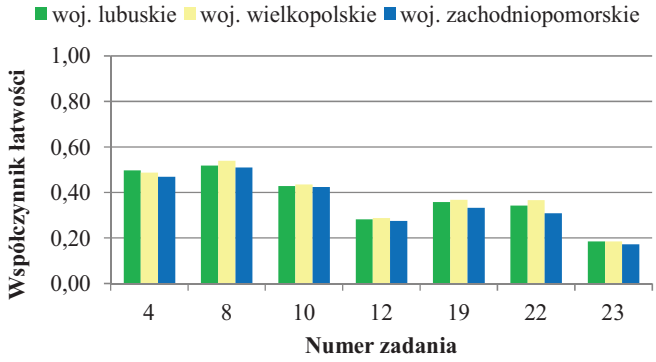
Użycie i tworzenie strategii



Trudności sprawiło piszącym ustalenie zależności między podanymi informacjami, zaplanowanie i wykonanie ciągu czynności, prowadzących do rozwiązania problemu oraz krytyczna ocena otrzymanych wyników.

Wykres 8. *Poziom osiągnięć uczniów z zakresu używania i tworzenia strategii.*

Rozumowanie i argumentacja

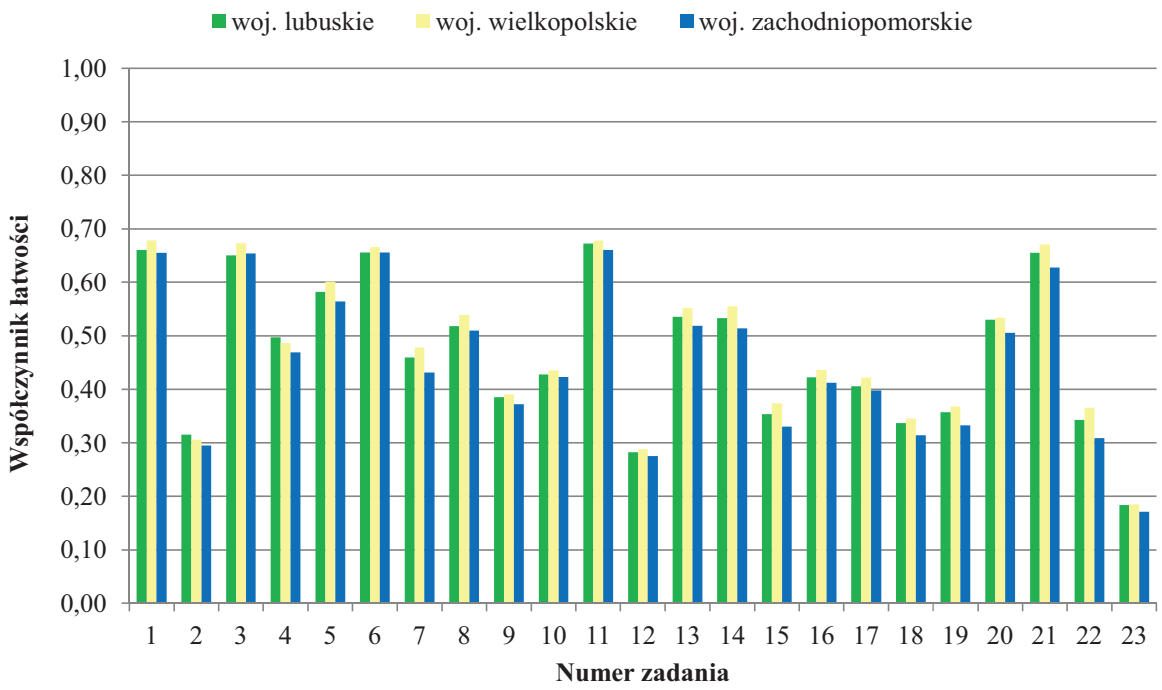


Najtrudniejsze okazało się dla piszących przeprowadzenie prostego rozumowania i uzasadnienie jego poprawności.

Wykres 9. *Poziom osiągnięć uczniów z zakresu rozumowania i argumentacji.*

3. Analiza poziomu opanowania umiejętności szczegółowych

Za miarę poziomu opanowania przez uczniów wiadomości i umiejętności, badanych podczas egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki, a opisanych poprzez wymagania szczegółowe w podstawie programowej, przyjęto współczynniki łatwości zadań.



Wykres 10. *Poziom opanowania wiadomości i umiejętności szczegółowych (zadania 1.-23.)*

Na podstawie analizy wykresu można stwierdzić, że:
- wystąpiły nieznaczne różnice dotyczące poziomu osiągnięć uczniów z województw na terenie działania poznańskiej OKE,
- gimnazjaliści z Wielkopolski – w większości zadań – uzyskali wyższe wyniki niż uczniowie z województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego,
- żadne z zadań nie zostało rozwiązane na poziomie zadowalającym,
- najłatwiejsze dla piszących we wszystkich województwach okazały się trzy zadania:
    - zadanie 1. – związane z obliczaniem procentów,
    - zadanie 11 – obliczenie i porównanie czasu potrzebnego do przebycia określonej drogi,
    - zadanie 21. (zadanie otwarte) – wykazanie opłacalności zakupu karty rabatowej, uprawniającej do korzystania z basenu,
- najtrudniejsze okazało się zadanie 23., wymagające od ucznia obliczenia pola powierzchni bryły, która powstała z sześcianu.

Treść wszystkich zadań wraz z komentarzem dotyczącym wyników przedstawiono na następnych stronach.

3a. Analiza odpowiedzi uczniów do zadań zamkniętych

Aby ułatwić analizę odpowiedzi, jakich udzielali uczniowie, wprowadzono skróty. Wyjaśnienie skrótów zastosowanych w opracowaniu:

BO	brak odpowiedzi	oznacza, że uczeń nie podjął próby rozwiązania zadania
WO	wielokrotna odpowiedź	oznacza, że uczeń zaznaczył w karcie kilka odpowiedzi do jednego zadania
T	tak	oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest trafne (uzasadnione)
N	nie	oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest nietrafne (nieuzasadnione)
P	prawda	oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za prawdziwe
F	fałsz	oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za fałszywe

Informacja do zadań 1. i 2.
Promocja w zakładzie optycznym jest związana z wiekiem klienta i polega na tym, że klient otrzymuje tyle procent zniżki, ile ma lat.

Zadanie 1. (0-1)

Cena okularów bez promocji wynosi 240 zł. Ile zapłaci za te okulary klient, który ma 35 lat? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 84 zł B. 132 zł C. 156 zł D. 205 zł

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
5. Procenty. Uczeń:
2) oblicza procent danej liczby.

Zadanie 1.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odp.	**L**	**W**	**Z**
A.	17,17	17,99	18,53
B.	5,97	4,57	5,56
C.*	**66,61**	**67,77**	**64,71**
D.	10,20	9,64	11,12
BO	0,04	0,03	0,07
WO	0,00	0,00	0,00

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,66	**0,68**	**0,66**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.

**pogrubienia w tabelach oznaczają poprawną odpowiedź*

Komentarz
Typowe zadanie sprawdzające umiejętności w zakresie stosowania obliczeń procentowych. Treść zadania oparta w kontekście praktycznym. Rozwiązanie nie wymagało żadnych skomplikowanych rachunków. Należało obliczyć procent danej liczby w oparciu o podstawowe, proste działanie na liczbach wymiernych, a następnie uwzględnić promocję jako obniżkę ceny okularów. Uczniowie często swoje obliczenia kończyli na obliczeniu tylko samej wartości promocji, a nie ceny końcowej. Błędna interpretacja pojęcia procentu oraz promocji, jak i popełniane błędy rachunkowe, przyczyniły się do niskiego poziomu wykonania zadania.
W praktyce szkolnej należy zwracać szczególną uwagę na właściwe interpretowanie tekstu, poszukiwanie najprostszych rozwiązań, właściwe ich planowanie oraz krytyczne podejście do uzyskanego wyniku końcowego w odniesieniu do przedstawionych warunków zadania.

Zadanie 2. (0-1)

Okulary bez promocji kosztują 450 zł, a klient zgodnie z obowiązującą promocją może je kupić za 288 zł. Ile lat ma ten klient? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 64 B. 56 C. 44 D. 36

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
5. Procenty. Uczeń:
4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym.

Zadanie 2.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odp.	**L**	**W**	**Z**
A.	39,53	42,17	39,26
B.	13,37	11,94	13,49
C.	15,75	14,37	17,34
D.	**32,25**	**31,38**	**29,72**
BO	0,10	0,14	0,17
WO	0,00	0,01	0,01

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,32	**0,31**	**0,29**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla rozwiązujących trudne.

Komentarz
W zadaniu należało dokonać krótkiej analizy tekstu, a następnie zaplanować i podjąć właściwe czynności. Trudności sprawiło uczniom ustalenie prawidłowych zależności między informacjami podanymi w tekście. Jedną z możliwości rozwiązania jest zastosowanie metody, w której należy obliczy. różnicę kosztu okularów przed promocją i po promocji, a następnie obliczyć, jaki procent jednej liczby stanowi druga liczba
(tzn. wykonać działanie: $\frac{162}{450} \cdot 100\%$*).*
Piszący błędnie interpretowali treść zadania i nie obliczali wysokości kwoty uzyskanej w promocji jako odpowiedniej różnicy danych cen. Liczyli od razu różnicę między danymi kwotami 288 zł i 450 zł. Wskazuje na to bardzo częsty wybór odpowiedzi A. Należy intensywnie pracować nad kształceniem umiejętności analizowania zadań tekstowych

podawanych w nieco bardziej złożonej formie. Obliczenia procentowe to umiejętność niezbędna w życiu, powinna zostać opanowana przez gimnazjalistów na bardzo wysokim poziomie.

Zadanie 3. (0-1)

Sześć maszyn produkuje pewną partię jednakowych butelek z tworzywa sztucznego przez 4 godziny. Każda z maszyn pracuje z taką samą stałą wydajnością.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Przez 8 godzin taką samą partię butelek wykonają 3 takie maszyny.	P	F
Połowę partii takich butelek 6 maszyn wykona przez 2 godziny.	P	F

Wymagania ogólne.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe.
7. Równania. Uczeń:
1) zapisuje związki między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym związki między wielkościami wprost proporcjonalnymi i odwrotnie proporcjonalnymi.

Zadanie 3.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
PP	**65,55**	**67,48**	**65,70**		**0,65**	**0,67**	**0,65**
PF	11,43	10,78	11,07				
FP	20,31	19,09	20,48		Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	2,44	2,49	2,63		**Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne**		
BO	0,12	0,06	0,05				
WO	0,16	0,09	0,09				

Komentarz
W zadaniu, odwołującym się do sytuacji praktycznej, należało ustalić związek między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Zadanie wymagało logicznej analizy i wykonania prostych, wręcz pamięciowych, obliczeń na liczbach naturalnych. Zaletą tego typu zadań, zwłaszcza jako zamkniętych, jest możliwość stosowania niestandardowych rozwiązań.
Aby wskazać poprawną odpowiedź, wystarczyło np. zauważyć związek między liczbą maszyn a czasem produkcji i zastosować własność wielkości odwrotnie proporcjonalnych poprzez wyznaczenie stałego iloczynu równego 24. Zadanie okazało się umiarkowanie trudne dla uczniów.

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczbą większą od $\frac{1}{3}$ jest

A. $\frac{300}{900}$ **B.** $\frac{300}{900-1}$ **C.** $\frac{300}{900+1}$ **D.** $\frac{300-1}{900}$

Wymagania ogólne.
V. Rozumowanie i argumentacja
Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
6) szacuje wartości wyrażeń arytmetycznych.

Zadanie 4.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	8,92	9,07	10,77		**0,50**	**0,49**	**0,47**
B.	**50,44**	**48,73**	**47,34**				
C.	31,79	33,54	33,72		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	8,76	8,53	8,04		**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów**		
BO	0,08	0,11	0,14		**umiarkowanie trudne.**	**trudne.**	**trudne.**
WO	0,02	0,03	0,00				

Komentarz
Zadanie sprawdza umiejętność porównywania ułamków zwykłych z możliwością zastosowania metody szacowania. Jednym ze sposobów rozwiązania była krytyczna analiza proponowanych odpowiedzi i wyeliminowanie odpowiedzi błędnych A i D jako nielogicznych. Uczniowie mieli trudności z końcową zamianą i porównaniem ułamków. Stąd wniosek, aby zwracać większa uwagę na porównywanie liczb wymiernych, stosując metodę szacowania.

Zadanie 5. (0-1)

Dane są liczby: 3, 3^4, 3^{12}.

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Iloczyn tych liczb jest równy

A. 3^{16} B. 3^{17} C. 3^{48} D. 3^{49}

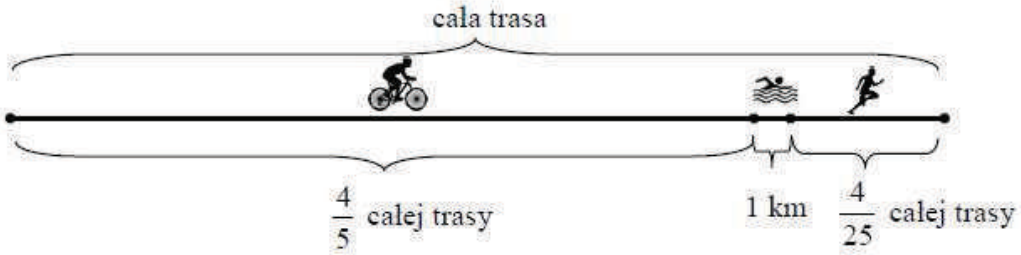
Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
3. Potęgi. Uczeń:
2) zapisuje w postaci jednej potęgi: iloczyny i ilorazy potęg o takich samych podstawach.

Zadanie 5.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	16,84	16,06	18,41		**0,58**	**0,60**	**0,56**
B.	**61,03**	**62,52**	**58,94**				
C.	16,53	16,28	17,38		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	5,59	5,05	5,22		**Zadanie okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,14	0,05	0,04				
WO	0,06	0,03	0,02				

Komentarz
Zadanie sprawdzające umiejętności w zakresie stosowania działań na potęgach o tych samych podstawach. Przy tak standardowym zadaniu można byłoby oczekiwać zdecydowanie wyższego poziomu wykonania zadania. Uczniowie często znają definicję, a nie potrafią jej właściwie zastosować. Należy zwracać uwagę na zapis wartości liczby 3 jako potęgi 3^1 (często bowiem uczniowie przyjmują 3 jako równe $3^{0)}$.

Zadanie 6. (0-1)

W zawodach sportowych każdy zawodnik miał pokonać trasę składającą się z trzech części. Pierwszą część trasy zawodnik przejechał na rowerze, drugą część − prowadzącą przez jezioro − przepłynął, a trzecią – przebiegł. Na rysunku przedstawiono schemat tej trasy.



Na podstawie informacji wybierz zdanie prawdziwe.
A. Cała trasa miała długość 50 km.
B. Zawodnik przebiegł 8 km.
C. Odległość, którą zawodnik przebiegł, była o 4 km większa od odległości, którą przepłynął.
D. Odległość, którą zawodnik przejechał na rowerze, była 5 razy większa od odległości, którą przebiegł.

Wymagania ogólne.
I. Wykorzystywanie i tworzenie informacji.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, […].

Zadanie 6.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	4,54	4,36	4,43		**0,66**	**0,67**	**0,66**
B.	5,16	4,83	5,02				
C.	23,82	23,39	24,57		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	**66,21**	**67,16**	**65,78**		**Zadanie okazało się dla trzecioklasistów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,14	0,12	0,11				
WO	0,14	0,14	0,09				

Komentarz
Zadanie odnoszące się do sytuacji codziennej. Jako zadanie zamknięte nie wymaga skomplikowanych obliczeń i zapisów. Bardzo pomocny przy rozwiązaniu jest czytelny rysunek, odnoszący się do informacji podanych w tekście. Uczeń może podjąć dowolny sposób rozwiązania, obrać swoją drogę prowadzącą do rozwiązania. Można np. ułożyć i rozwiązać odpowiednie równanie, oznaczając niewiadomą x długość całej trasy:

$$\frac{4}{5}x + 1 + \frac{4}{25}x = x$$

a następnie obliczyć $\frac{4}{5} \cdot 25$.

Wśród uczniów, którzy zastosowali tę metodę, znaczący wpływ na uzyskane wyniki miały często elementarne błędy w zakresie rozwiązywania równań. Należy kształcić nie tylko rozwiązywanie prostych równań, ale także podejmowanie rozwiązań kreatywnych, opartych na logicznym wnioskowaniu bez konieczności stosowania algorytmów. Takie sposoby sprawdzają się przy rozwiązywaniu zadań zamkniętych. Wskazane jest, aby zadania tekstowe rozwiązywać wieloma różnorodnymi metodami i sposobami, zawsze konfrontując uzyskane wyniki z warunkami zadania.

Zadanie 7. (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba znajduje się na osi liczbowej między 120
A. 10 i 11 B. 11 i 12 C. 12 i 20 D. 30 i 40

Wymagania ogólne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe.
4. Pierwiastki. Uczeń:
1) oblicza wartości pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych.
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:
1) interpretuje liczby wymierne na osi liczbowej. Oblicza odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej.

Zadanie 7.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	**48,88**	**49,72**	**45,21**		**0,46**	**0,48**	**0,43**
B.	22,64	22,40	23,55				
C.	18,33	18,27	20,91		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	10,05	9,39	10,17		**Zadanie okazało się dla zdających trudne.**		
BO	0,10	0,22	0,16				
WO	0,00	0,01	0,00				

Komentarz
Zadanie sprawdzało umiejętność obliczania pierwiastków kwadratowych i interpretowania liczb na osi liczbowej. Wskazanie prawidłowej odpowiedzi ułatwiała krytyczna ocena proponowanych odpowiedzi i eliminacja odpowiedzi C i D jako nielogicznych. Zadanie okazało się trudne dla gimnazjalistów. Po raz kolejny potwierdza to fakt, że uczniowie znając definicję i twierdzenia, nie potrafią ich właściwie zastosować. Wykorzystanie własności i działań na pierwiastkach to ważne umiejętności, szczególnie potrzebne w dalszych etapach kształcenia. Należy poświęcić tym zagadnieniom więcej uwagi.

Zadanie 8.

Rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{51}{370}$ jest równe 0,1(378).

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Na pięćdziesiątym miejscu po przecinku tego rozwinięcia znajduje się cyfra

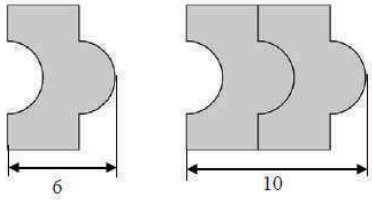
A. 1 B. 3 C. 7 D. 8

Wymagania ogólne.
V. Rozumowanie i argumentacja
Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
3) zamienia ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne (także okresowe), zamienia ułamki dziesiętne skończone na ułamki zwykłe.

Zadanie 8.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	6,42	6,31	7,59		**0,52**	**0,54**	**0,51**
B.	**52,24**	**54,28**	**51,62**				
C.	26,46	24,62	24,78		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	14,82	14,71	15,92		**Zadanie okazało się dla rozwiązujących umiarkowanie trudne.**		
BO	0,02	0,05	0,07				
WO	0,04	0,04	0,01				

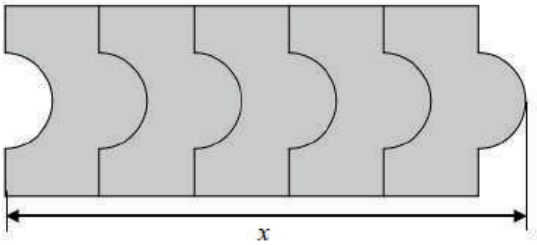
Komentarz
Zadanie odnosi się do V obszaru wymagań ogólnych (rozumowanie i argumentacja). Sprawdza, czy uczniowie potrafią zamieniać ułamek zwykły na dziesiętny z dokonaniem dalszego prawidłowego wnioskowania. Na uzyskane wyniki często mają wpływ popełniane w elementarnych obliczeniach błędy rachunkowe. Należy doskonalić obliczenia rachunkowe bez użycia kalkulatora.

Informacja do zadań 9. i 10.
Na rysunkach przedstawiono kształt i sposób układania płytek oraz niektóre wymiary w centymetrach.



Zadanie 9. (0-1)

Ułożono wzór z 5 płytek, jak na rysunku.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Odcinek *x* ma długość

A. 20 cm B. 22 cm C. 26 cm D. 30 cm

Wymagania ogólne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, […].

Zadanie 9.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	3,26	3,03	3,37		**0,39**	**0,39**	**0,37**
B.	**39,13**	**39,67**	**37,24**				
C.	49,91	49,96	51,22		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	7,58	7,31	7,74		**Zadanie okazało się dla piszących trudne.**		
BO	0,06	0,03	0,06				
WO	0,06	0,00	0,00				

Komentarz
Zadanie sprawdzało umiejętność logicznego powiązania przedstawionych informacji z odpowiednią interpretacją danego obiektu. Dużą trudność sprawiło uczniom ustalenie i wykorzystanie zależności między podanymi w formie rysunku informacjami. Należy kształcić wyobraźnię geometryczną, mającą odniesienie do nietypowych sytuacji i zachęcać uczniów do podejmowania kreatywnych rozwiązań.

Zadanie 10. (0-1)

Które wyrażenie algebraiczne opisuje długość analogicznego do *x* odcinka dla wzoru złożonego z *n* płytek? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 6n B. 6n – 4 C. 4n – 2 D. 4n +2

Wymagania ogólne.
III. Modelowanie matematyczne.
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe.
6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:
1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami.

Zadanie 10.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	19,53	19,74	22,02		**0,43**	**0,44**	**0,42**
B.	27,16	26,68	26,25				
C.	11,72	11,31	11,13		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	**41,20**	**42,08**	**40,29**		**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.**		
BO	0,35	0,19	0,25				
WO	0,04	0,02	0,06				

Komentarz
Za pomocą zadania sprawdzano, czy gimnazjaliści potrafią zapisać związek między wskazanymi wielkościami za pomocą wyrażeń algebraicznych. Uczniowie z dużą trudnością posługują się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych. Około 40% piszących wybrało właściwe wyrażenie arytmetyczne. Wskazane byłoby w praktyce szkolnej uwzględnić także rozwiązywanie zadań nietypowych o nieco wyższym stopniu trudności, odnoszących się w szczególności do sytuacji praktycznych.

Zadanie 11. (0-1)

Prędkość średnia piechura na trasie 10 km wyniosła $\mathbf{5}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a prędkość średnia rowerzysty na tej samej trasie była równa $\mathbf{20}\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

O ile minut więcej zajęło pokonanie tej trasy piechurowi niż rowerzyście? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 30 minut B. 60 minut C. 90 minut D. 120 minut

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Zadanie 11.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	10,55	11,53	12,50
B.	14,06	12,84	13,59
C.	**66,98**	**67,51**	**65,45**
D.	8,28	8,02	8,34
BO	0,12	0,10	0,12
WO	0,00	0,01	0,00

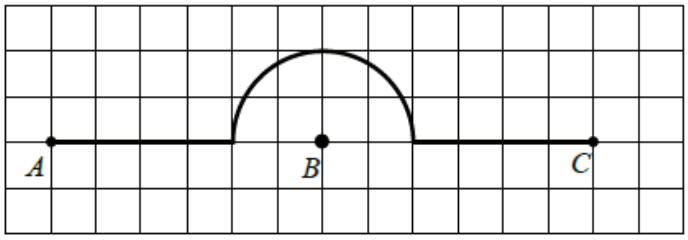
Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,67	**0,68**	**0,66**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne.

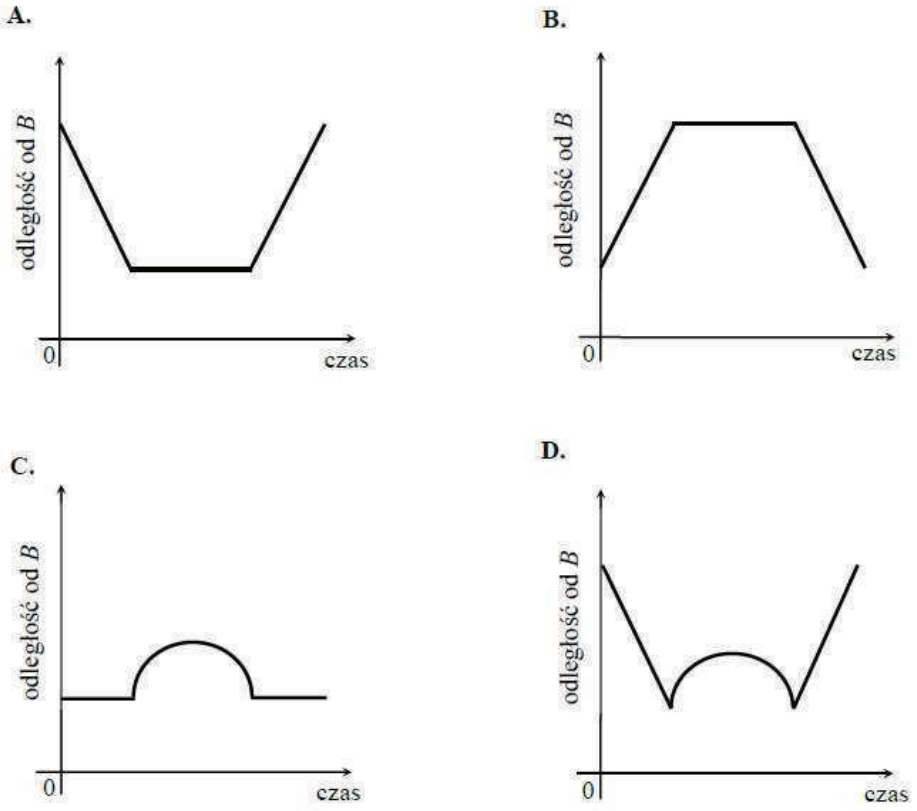
Komentarz
Rozwiązanie polegało na obliczeniu i porównaniu czasu potrzebnego do przebycia określonej drogi. Zadanie nie sprawiło uczniom większych trudności. Uczniowie znali podstawowy związek między prędkością, drogą i czasem w ruchu jednostajnym. Potrafili także zamieniać jednostki czasu – godziny na minuty. Są to umiejętności związane z kumulatywnością kształcenia, rozwijane i stosowanee głównie na fizyce, stąd poziom wykonania zadania powinien wysoki.

Zadanie 12. (0-1)

Piechur szedł z punktu *A* do punktu *C* ze stałą prędkością. Część trasy przeszedł wzdłuż prostej, a część – po łuku okręgu o środku w punkcie *B* (patrz rysunek).



Na którym z poniższych wykresów zilustrowano, jak zmieniała się odległość piechura od punktu *B*? Wybierz odpowiedź spośród podanych.



Wymagania ogólne.
I. Wykorzystywanie i tworzenie informacji.
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe.
8. Wykresy funkcji. Uczeń:
4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).

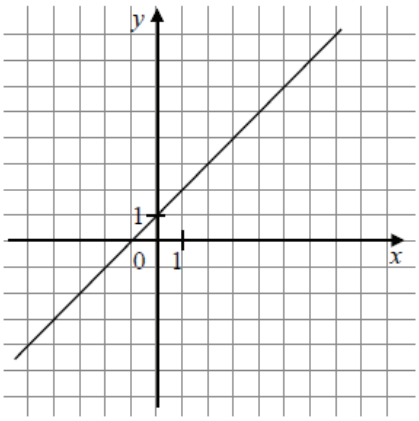
Zadanie 12.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	**29,25**	**29,42**	**27,93**		**0,28**	**0,29**	**0,27**
B.	19,07	18,58	18,36				
C.	34,92	35,70	38,10		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	16,53	16,13	15,47		**Zadanie okazało się dla trzecioklasistów trudne.**		
BO	0,19	0,14	0,12				
WO	0,04	0,03	0,01				

Komentarz
Poprawne rozwiązanie zadania wymagało powiązania informacji przedstawionej za pomocą rysunku z odpowiednią interpretacją wykresu funkcji. Zadanie okazało się dla uczniów trudne, stąd też wysoka frakcja opuszczeń. Zauważyć należy także, że uczniowie wybierając

bardzo często odpowiedź C interpretowali przedstawiony rysunek jako wykres. Należy kształcić, także na lekcjach fizyki, umiejętność interpretowania wykresów, opisujących różne zależności.

Zadanie 13. (0-1)

W prostokątnym układzie współrzędnych przedstawiono wykres funkcji.



Które z poniższych zdań jest <u>fałszywe</u>? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. Dla argumentu 2 wartość funkcji jest równa 3.
B. Funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu 1.
C. Wartość funkcji jest równa –2 dla argumentu –3.
D. Dla argumentów większych od –1 wartości funkcji są dodatnie.

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
8. Wykresy funkcji. Uczeń:
3) odczytuje z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumenty dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero.

Zadanie 13.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	11,48	10,35	12,14
B.	**53,29**	**55,01**	**50,72**
C.	18,53	17,74	18,78
D.	16,43	16,67	18,07
BO	0,23	0,21	0,21
WO	0,04	0,02	0,07

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,54	**0,55**	**0,52**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla zdających umiarkowanie trudne.

Komentarz
Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi dokonać interpretacji wykresu liniowego. Uczniowie wykazali się znajomością i zrozumieniem pojęć związanych z funkcją takich, jak argumenty oraz wartości funkcji.

Zadanie 14. (0-1)

Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Oznaczmy przez p_2 prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby podzielnej przez 2, a przez p_3 – prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby podzielnej przez 3.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Liczba p_2 jest mniejsza od liczby p_3.	P	F
Liczby p_2 i p_3 są mniejsze od $\frac{1}{3}$.	P	F

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
5) analizuje proste doświadczenia losowe (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciągnięcie losu) i określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą, dwójki lub szóstki w rzucie kostką, itp.).

Zadanie 14.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
PP	6,61	5,41	6,35
PF	25,57	24,88	27,25
FP	12,55	12,34	13,13
FF	**54,98**	**57,15**	**53,06**
BO	0,08	0,10	0,12
WO	0,21	0,11	0,09

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,53	**0,55**	**0,51**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.

Komentarz
*Analiza opisanych doświadczeń losowych i poprawne określenie prawdopodobieństwa dwóch prostych zdarzeń losowych okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne. Pierwsze zdanie średnio 25% uczniów w trzech województwach oceniło błędnie (**PF**). Uczniowie nie dokonali właściwego porównania ułamków zwykłych ⅓ i ½. Średnio co drugi tegoroczny absolwent gimnazjum potrafił określić prawdopodobieństwo prostych zdarzeń losowych.*

Zadanie 15. (0-1)

Ola codziennie, przez tydzień, odczytywała o 7 rano temperaturę powietrza. Oto podane (w °C) wyniki jej pomiarów: −2, 3, 4, 0, −3, 2, 3.

Wybierz odpowiedź, w której podano poprawne wartości średniej arytmetycznej, mediany i amplitudy (różnica między wartością najwyższą i wartością najniższą) zanotowanych temperatur.

	Średnia arytmetyczna (°C)	Mediana (°C)	Amplituda (°C)
A.	7	0	1
B.	1	0	7
C.	7	2	1
D.	1	2	7

Wymagania ogólne.
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:
4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Zadanie 15.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	17,96	18,12	19,50
B.	29,25	28,20	28,69
C.	16,57	15,38	17,81
D.	**36,08**	**38,18**	**33,83**
BO	0,14	0,11	0,15
WO	0,00	0,01	0,01

Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,35	**0,37**	**0,33**

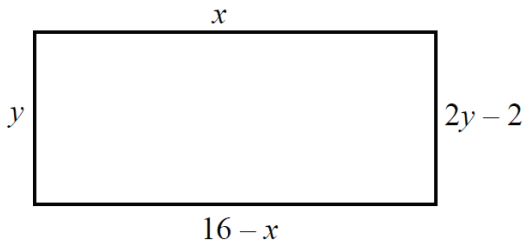
Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.

Komentarz
Aby poprawnie rozwiązać zadanie, należało podane wartości uporządkować w kolejności niemalejącej, a następnie wyznaczyć medianę oraz obliczyć wartości amplitudy i średniej arytmetycznej. Uczniowie często nie znali pojęcia „mediana", stąd nie potrafili dokonać wyboru prawidłowej odpowiedzi. Przy wyznaczaniu mediany problematyczne okazało się także podana dwukrotnie wartość 3. Wielu uczniów z tego powodu wybierało odpowiedź błędną. Należy nie tylko utrwalać podstawowe pojęcie statystyki, jakim jest „mediana", ale także rozważać różne nieschematyczne przypadki przy wyznaczaniu jej wartości. Podkreślić należy, że zarówno obliczenie amplitudy, jak i średniej arytmetycznej nie stanowiły dla uczniów problemu.

Zadanie 16. (0-1)

Na rysunku przedstawiono prostokąt, którego wymiary są opisane za pomocą wyrażeń.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.

Jeden z boków prostokąta ma długość 8.	P	F
Obwód prostokąta jest równy 20.	P	F

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe.
7. Równania. Uczeń:
1) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.
10. Figury płaskie. Uczeń:
9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

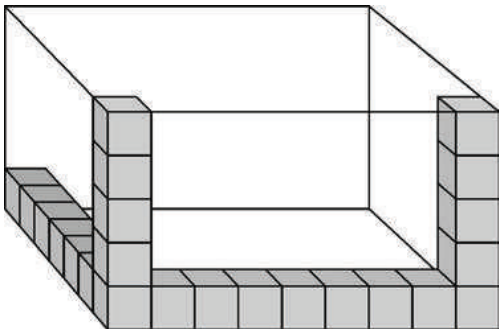
Zadanie 16.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
PP	**42,62**	**43,61**	**41,19**		**0,42**	**0,44**	**0,41**
PF	29,95	29,43	29,59				
FP	11,04	10,81	12,66		Interpretacja współczynnika łatwości		
FF	15,97	15,88	16,31		**Zadanie okazało się dla uczniów trudne.**		
BO	0,25	0,18	0,17				
WO	0,17	0,10	0,09				

Komentarz
W zadaniu należało najpierw obliczyć długości boków prostokąta, a następnie obliczyć jego obwód. Uczniowie nie radzi sobie z planowaniem kolejnych etapów rozwiązania (w tym przypadku należało wcześniej rozwiązać dwa proste równania), chętnie wykorzystują gotowe wzory i algorytmy postępowania. Niezbędne jest rozwiązywanie większej liczby łatwych, ale nieschematycznych zadań, wymagających wnikliwej analizy i zaplanowania właściwego rozwiązania.

Komentarz ogólny do zadań: 17, 18, 19
Zadania: 17., 18. i 19 to zadania o treściach geometrycznych, odnoszące się do sytuacji praktycznych, sprawdzające logikę wnioskowania i prawidłowe interpretowanie informacji przedstawionych za pomocą rysunków. Okazało się, że rozwiązanie zadań tego typu jest trudne. Dotyczy to zarówno zadań z zakresu geometrii płaskiej, jak i przestrzennej.
Należy zdecydowanie więcej uwagi poświęcić rozwiązywaniu zadań o treściach geometrycznych, bez stosowania rutynowych działań z zastosowaniem samych wzorów, a skłaniających do właściwego modelowania i planowania ciągu czynności.

Zadanie 17. (0-1)

Szymon wykonał szkielet prostopadłościanu. Układał i sklejał ze sobą kolejno drewniane klocki sześcienne o krawędzi 4 cm wzdłuż każdej krawędzi prostopadłościennego pudełka o wymiarach: 36 cm, 28 cm, 20 cm. Na rysunku przedstawiono część wykonanego szkieletu.



Ile klocków łącznie zużył Szymon na wykonanie całego szkieletu? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 84 B. 76 C. 68 D. 60

Wymagania ogólne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe.
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, [...].

Zadanie 17.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	32,38	31,17	32,87
B.	19,28	19,92	19,75
C.	**41,57**	**42,60**	**40,88**
D.	6,58	6,11	6,37
BO	0,17	0,14	0,10
WO	0,02	0,06	0,02

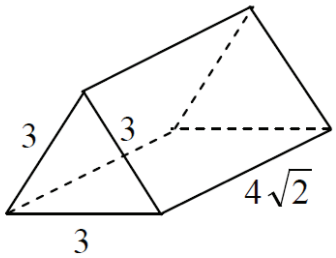
Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,41	**0,42**	**0,40**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla trzecioklasistów trudne.

Komentarz
Rozwiązując zadanie należało stworzyć strategię rozwiązania i w oparciu o nią przeprowadzić odpowiednie rozumowanie. Treść zadania nawiązuje do sytuacji praktycznej. Uczniowie nie radzą sobie z wyobraźnią przestrzenną i konstruowaniem modeli brył.

Zadanie 18. (0-1)

Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty i jego wymiary.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Objętość tego graniastosłupa jest równa

A. $9\sqrt{6}$ B. $18\sqrt{2}$ C. $18\sqrt{6}$ D. $36\sqrt{2}$

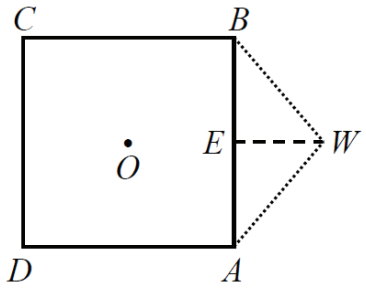
Wymagania ogólne.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe.
11. Bryły. Uczeń:
2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Zadanie 18.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	**34,41**	**34,81**	**31,08**		**0,34**	**0,35**	**0,31**
B.	22,21	21,02	22,27				
C.	17,96	18,00	19,74		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	25,20	25,88	26,64		**Zadanie okazało się dla piszących trudne.**		
BO	0,21	0,27	0,27				
WO	0,00	0,02	0,00				

Komentarz
Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zbudować model matematyczny sytuacji przedstawionej na rysunku, czyli czy potrafi obliczyć objętość narysowanego graniastosłupa. Trudność zadania tkwiła w nietypowym przedstawieniu modelu graniastosłupa prostego. Należało zauważyć, że podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny. Najważniejsze było przeprowadzenie odpowiedniego rozumowania, co okazało się dla gimnazjalistów trudne.

Zadanie 19. (0-1)

Maciek rysuje siatkę ostrosłupa prawidłowego, którego podstawą jest kwadrat o środku w punkcie O i boku długości 8.



Czy trójkąt *ABW* o bokach długości odpowiednio: 8, 5, 5 może być ścianą boczną takiego ostrosłupa? Wybierz odpowiedź T (tak) lub N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań A–C.

T	ponieważ	**A.**	trójkąt *ABW* jest równoramienny.
N		**B.**	odległość *OE* jest mniejsza niż wysokość *EW* trójkąta *ABW*.
		C.	odległość *OE* jest większa niż wysokość *EW* trójkąta *ABW*.

Wymagania ogólne.
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe.
11. Bryły. Uczeń:
1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe.
10. Figury płaskie. Uczeń:
7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.
Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.
Uczeń rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów.

Zadanie 19.

Wybieralność odpowiedzi (wersja A)			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
TA	35,71	35,35	38,15
TB	8,63	7,43	8,26
TC	5,10	5,52	5,36
NA	4,83	4,84	5,53
NB	10,36	10,57	10,36
NC	**35,05**	**36,01**	**32,09**
BO	0,04	0,07	0,05
WO	0,27	0,21	0,20

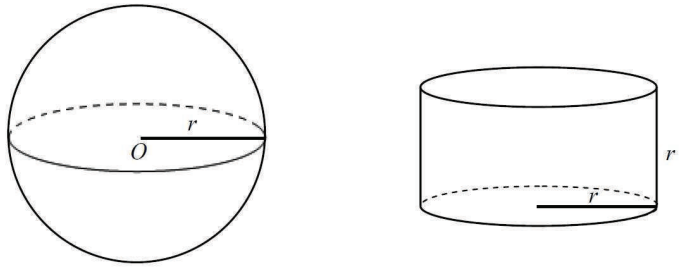
Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
L	**W**	**Z**
0,36	**0,37**	**0,33**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla uczniów trudne.

Komentarz
Zadanie odnosi się do V obszaru wymagań ogólnych (rozumowanie i argumentacja). Zadanie sprawdzało także zastosowanie twierdzenia Pitagorasa. Niepokój wzbudza znaczący wybór błędnej odpowiedzi TA (ponad 35%,). Świadczy to o braku umiejętności logicznego powiązania długości krawędzi podstawy z długością krawędzi bocznej ostrosłupa, którą jest długość boku AW w trójkącie ABW. Można wnioskować, że uczniowie w praktyce szkolnej zbyt mało wykonywali własnoręcznie modeli ostrosłupów.

Zadanie 20. (0-1)

Dane są kula o środku w punkcie O i promieniu r oraz walec o promieniu podstawy r i wysokości r.



Na podstawie informacji wybierz zdanie prawdziwe.
A. Objętość kuli jest równa objętości walca.
B. Objętość kuli jest 2 razy większa od objętości walca.
C. Objętość walca stanowi $\frac{3}{4}$ objętości kuli.
D. Objętość walca jest 3 razy mniejsza od objętości kuli.

Wymagania ogólne.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe.
11. Bryły. Uczeń:
2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Zadanie 20.							
Wybieralność odpowiedzi (wersja A)					Współczynnik łatwości (wersja A i B)		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	14,45	14,67	16,53		**0,53**	**0,53**	**0,51**
B.	21,05	21,25	22,08				
C.	**54,57**	**54,08**	**52,09**		Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	9,84	9,90	9,21		**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne.**		
BO	0,10	0,09	0,07				
WO	0,00	0,01	0,01				

Komentarz
Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zastosować wzory i obliczyć objętość kuli oraz walca. Kolejne czynności związane były z przekształceniem wzorów i porównaniem danych wielkości. Analizując wybór odpowiedzi uczniowskich można stwierdzić, że w każdym województwie ponad 20% gimnazjalistów wskazało błędną odpowiedź B. Świadczy to tym, że uczniowie nie są wdrożeni do krytycznej oceny uzyskanych rezultatów.

3b. Analiza odpowiedzi uczniów do zadań otwartych wraz z przykładami rozwiązań

Za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych uczeń mógł otrzymać maksymalnie 8 punktów. W tabeli zebrano dane, określające jaki procent wszystkich piszących w danym województwie uzyskał za rozwiązanie zadań otwartych maksymalną liczbę punktów, a jaki zero punktów. Zero punktów otrzymywali uczniowie, którzy źle rozwiązali zadanie oraz ci, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania.

województwo	**Odsetek uczniów, którzy za rozwiązanie zadań otwartych otrzymali**	
	maksymalną punktację (8 pkt)	**0 pkt**
lubuskie	**5,21%**	**13,04%**
wielkopolskie	**5,65%**	**11,40%**
zachodniopomorskie	**4,80%**	**15,05%**

Zakłada się, że w każdym rozkładzie normalnym zbliżony procent populacji osiąga wyniki najwyższe, jak i najniższe. Tymczasem za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych w województwie lubuskim i wielkopolskim zero punktów otrzymywało około dwa razy, w województwie zachodniopomorskim – trzy razy więcej zdających w porównaniu z tymi, którzy uzyskali maksymalną liczbę punktów.

.

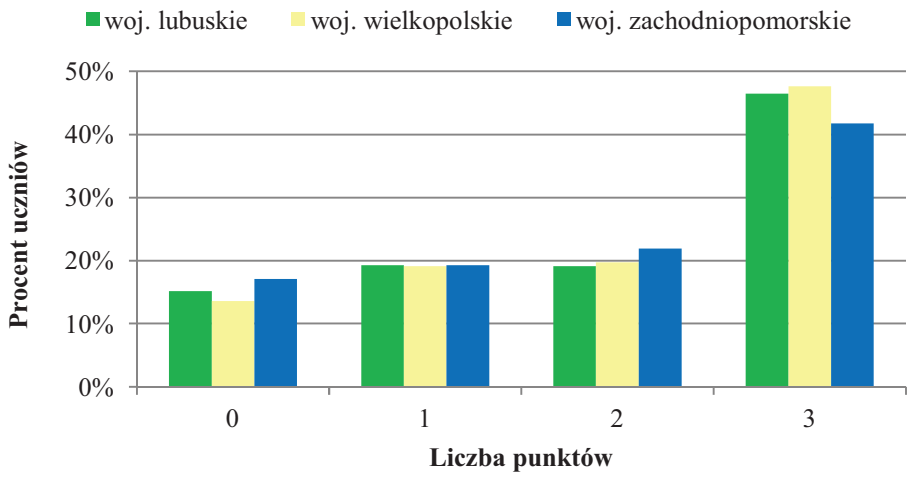
Zadanie 21. (0-3)

Cena godziny korzystania z basenu wynosi 12 zł. Można jednak kupić miesięczną kartę rabatową za 50 złotych, upoważniającą do obniżki cen, i wtedy za pierwsze 10 godzin pływania płaci się 8 złotych za godzinę, a za każdą następną godzinę – 9 złotych. Wojtek kupił kartę rabatową i korzystał z basenu przez 16 godzin.
Czy zakup karty był dla Wojtka opłacalny? Zapisz obliczenia.

Wymagania ogólne
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe
1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:
7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, [...].

Poziom wykonania zadania 21.
Maksymalną liczbę punktów (3 pkt) uzyskało 45,9% populacji w Okręgu.
Zero punktów otrzymało 14,7% trzecioklasistów w Okręgu, z czego 5,2% nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 21.	**L**	**W**	**Z**
Średnia liczba punktów (max – 3 pkt)	1,97 pkt	2,01 pkt	1,88 pkt
Współczynnik łatwości	0,66	0,67	0,63
BO (brak odpowiedzi, w %)	5,68%	4,76%	5,86%
Interpretacja współczynnika łatwości	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne.**		



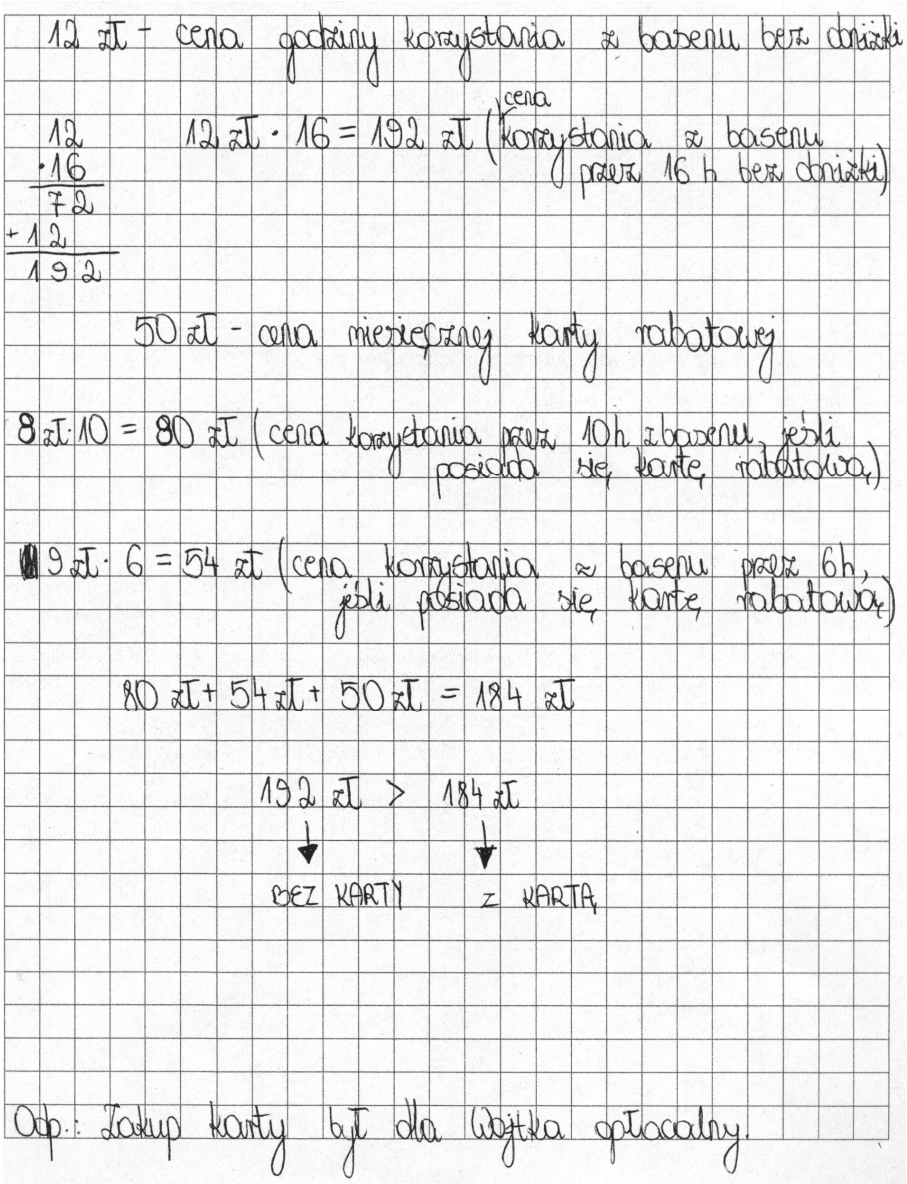
Wykres 11. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 21.*

Komentarz
Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi zbudować model matematyczny prowadzący do rozwiązania zadania osadzonego w kontekście praktycznym. W tym celu należało ustalić zależności między wielkościami, zaplanować i wykonać ciąg czynności prowadzących do rozwiązania problemu, precyzyjnie przedstawić przebieg swojego rozumowania oraz zinterpretować otrzymane wyniki. Zadanie wymagało przede wszystkim zrozumienia treści przedstawionej słownie.

Rozwiązania uczniowskie

<u>Odpowiedzi poprawne</u>

Przykłady 1.-2.
Przejrzysta analiza, właściwe obliczenia (koszt korzystania z basenu przez 16 godzin przez posiadacza karty rabatowej i bez karty) oraz sprawdzenie warunków zadania nie pozostawiają wątpliwości, że uczeń zaplanował rozwiązanie i potrafił je zinterpretować (porównanie liczb 192 i 184).


12 zł - cena godziny korzystania z basenu bez zniżki

12 · 16 = 192 zł (cena korzystania z basenu przez 16 h bez zniżki)

12
·16
72
+12
192

50 zł - cena niezbędnej karty rabatowej

8 zł · 10 = 80 zł (cena korzystania przez 10h z basenu, jeśli posiada się kartę rabatową)

9 zł · 6 = 54 zł (cena korzystania z basenu przez 6h, jeśli posiada się kartę rabatową)

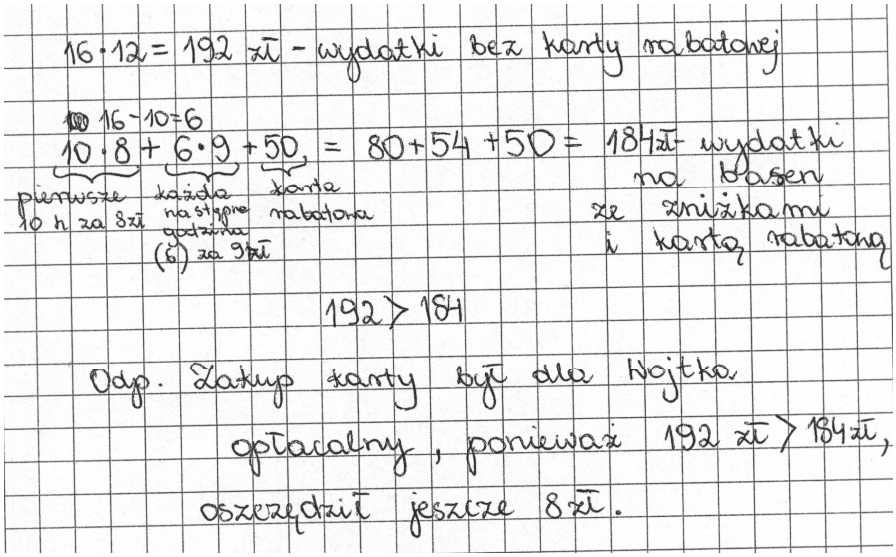
80 zł + 54 zł + 50 zł = 184 zł

192 zł > 184 zł

BEZ KARTY Z KARTĄ

Odp.: Zakup karty był dla Wojtka opłacalny.

Przykład 2.


16·12 = 192 zł - wydatki bez karty rabatowej

16 - 10 = 6

10·8 + 6·9 + 50 = 80 + 54 + 50 = 184 zł - wydatki na basen ze zniżkami i kartą rabatową

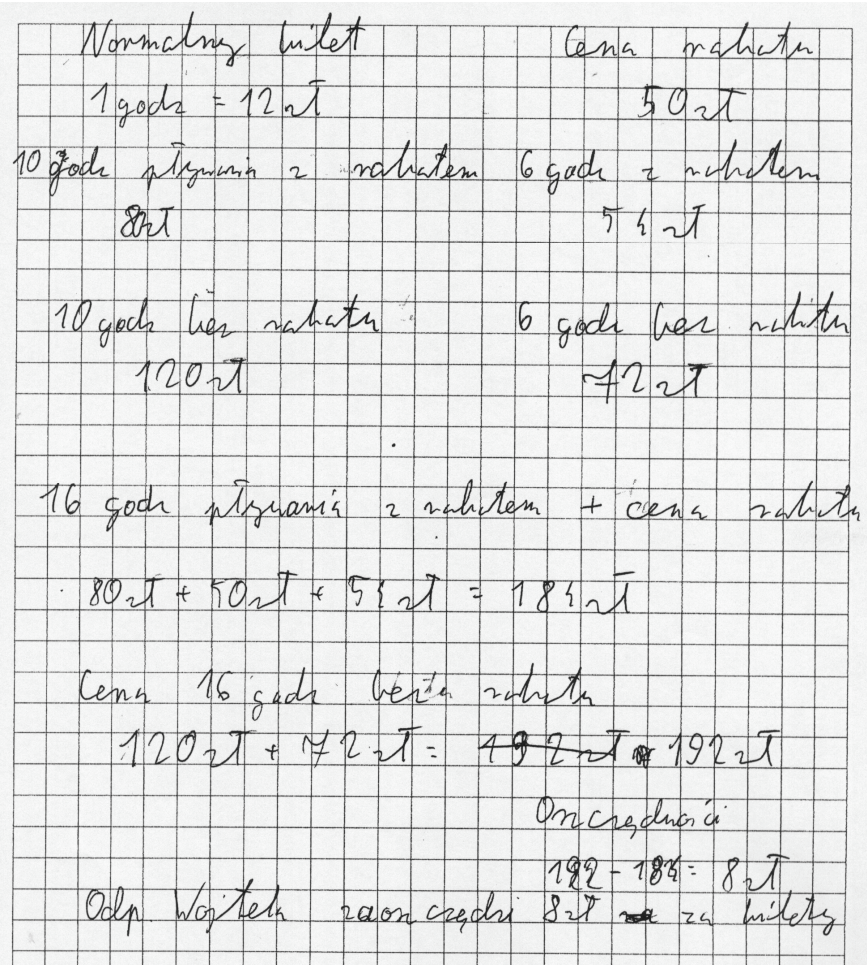
pierwsze 10 h za 8 zł; każda następna godzina (6) za 9 zł; karta rabatowa

192 > 184

Odp. Zakup karty był dla Wojtka opłacalny, ponieważ 192 zł > 184 zł, oszczędził jeszcze 8 zł.

Przykład 3.

Uczeń obliczył koszt korzystania z basenu przez posiadacza karty rabatowej (z uwzględnieniem kosztów jej zakupu). Obliczył również, ile kosztowałoby korzystanie z basenu bez zniżki. Następnie wyznaczył kwotę, jaką można zaoszczędzić i sformułował poprawny wniosek. W ten sposób większość gimnazjalistów zaprezentowała rozwiązanie zadania.


Normalny bilet
1 godz = 12 zł

Cena rabatu
50 zł

10 godz pływania z rabatem
80 zł

6 godz z rabatem
54 zł

10 godz bez rabatu
120 zł

6 godz bez rabatu
72 zł

16 godz pływania z rabatem + cena rabatu

80 zł + 50 zł + 54 zł = 184 zł

Cena 16 godz bez rabatu

120 zł + 72 zł = ~~192 zł~~ 192 zł

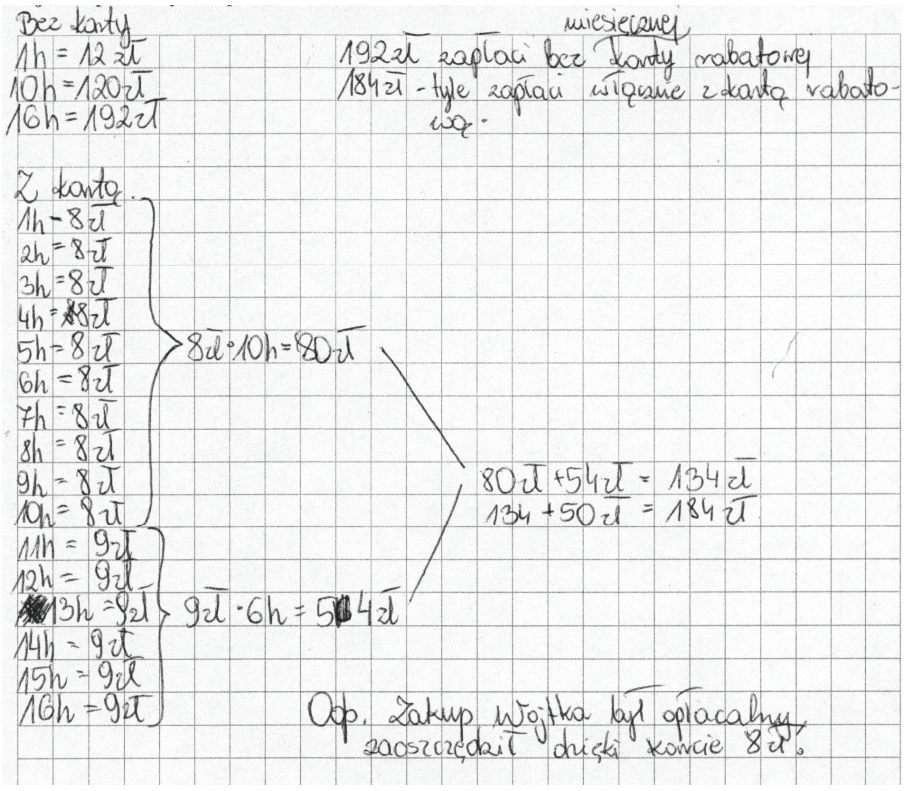
Oszczędności

192 - 184 = 8 zł

Odp. Wojtek zaoszczędzi 8 zł ~~za~~ za bilety

W kolejnych przykładach zaprezentowano rozwiązania typową metodą (obliczenie kosztów korzystania z basenu bez i ze zniżką, uwzględnienie kosztów zakupu karty i porównanie uzyskanych wyników). Gimnazjaliści w różny sposób radzili sobie z zapisem działań, ilustrujących tok ich rozumowania. (Przykłady 4.- 7.)

Przykład 4.


Bez karty
1h = 12 zł
10h = 120 zł
16h = 192 zł

192 zł zapłaci bez karty miesięcznej rabatowej
184 zł - tyle zapłaci wliczając z kartą rabatową.

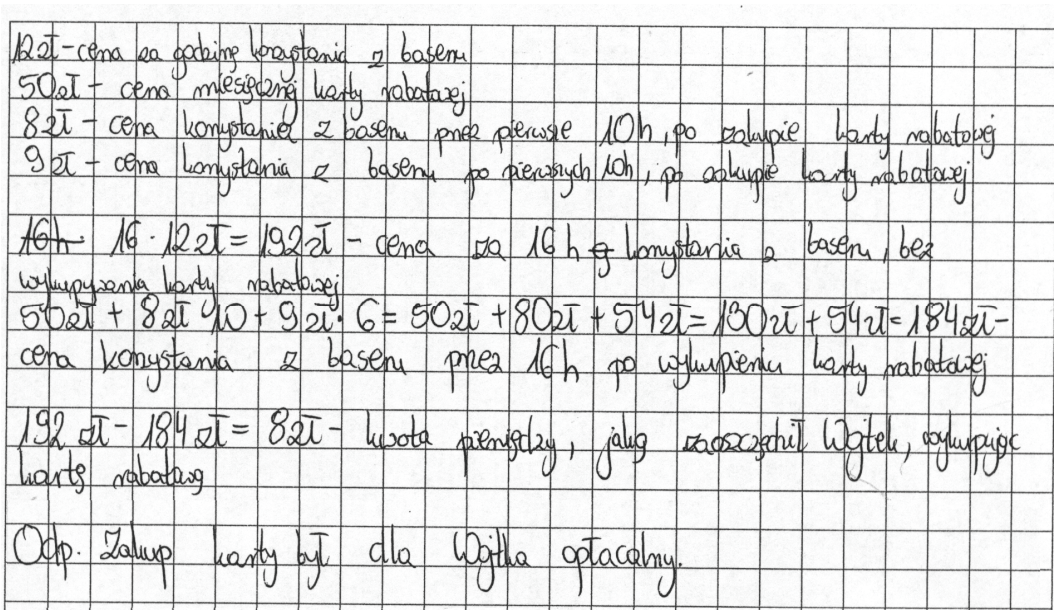
Z kartą
1h - 8 zł
2h = 8 zł
3h = 8 zł
4h = 8 zł
5h = 8 zł
6h = 8 zł
7h = 8 zł
8h = 8 zł
9h = 8 zł
10h = 8 zł
8 zł · 10h = 80 zł

11h = 9 zł
12h = 9 zł
13h = 9 zł
14h = 9 zł
15h = 9 zł
16h = 9 zł
9 zł · 6h = 54 zł

80 zł + 54 zł = 134 zł
134 + 50 zł = 184 zł

Odp. Zakup Wojtka był opłacalny, zaoszczędził dzięki kartce 8 zł.

Przykład 5.


12 zł - cena za godzinę korzystania z basenu
50 zł - cena miesięcznej karty rabatowej
8 zł - cena korzystania z basenu przez pierwsze 10h, po zakupie karty rabatowej
9 zł - cena korzystania z basenu po pierwszych 10h, po zakupie karty rabatowej

~~16h~~ 16 · 12 zł = 192 zł - cena za 16 h korzystania z basenu, bez wykupywania karty rabatowej
50 zł + 8 zł · 10 + 9 zł · 6 = 50 zł + 80 zł + 54 zł = 130 zł + 54 zł = 184 zł - cena korzystania z basenu przez 16h po wykupieniu karty rabatowej

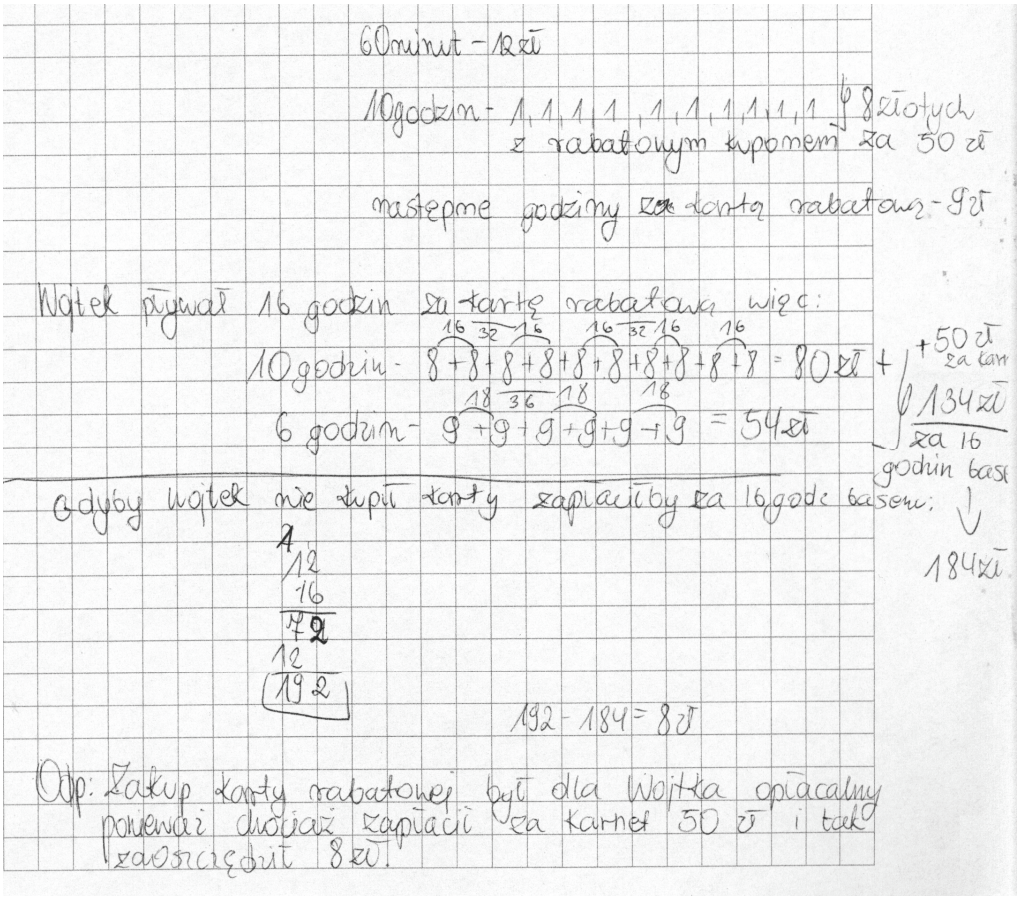
192 zł - 184 zł = 8 zł - kwota pieniędzy, jaką zaoszczędził Wojtek, wykupując kartę rabatową

Odp. Zakup karty był dla Wojtka opłacalny.

Przykład 6.

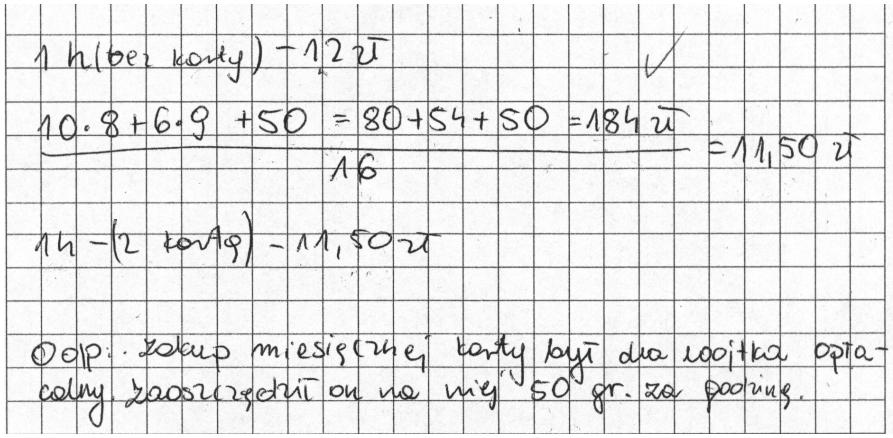
Łączny koszt wizyt Wojtka na basenie przed kupnem karty rabatowej:
liczba godzin - 16
opłata za 1godz - 12zł
16 · 12zł = 192zł
Łączny koszt wizyt Wojtka na basenie po kupieniu karty rabatowej:
~~koszt~~ cena karty - 50zł
opłata za 1godz pływania (do 10godzin) - 8zł
opłata za 1godz pływania (powyżej 10godzin) - 9zł
Wojtek ~~pływa~~ korzystał z basenu przez 16godz, czyli za 10godz zapłacił po 8zł/za godz, a za 6godzin zapłacił 9zł /za godz.
10 · 8zł = 80zł 6 · 9zł = 54zł
razem: 80zł + 54zł + 50zł = 184zł
192zł - 184zł = 8zł.
Odp: Tak zakup karty przez Wojtka był opłacalny, ponieważ zaoszczędził 8zł.

Przykład 7.

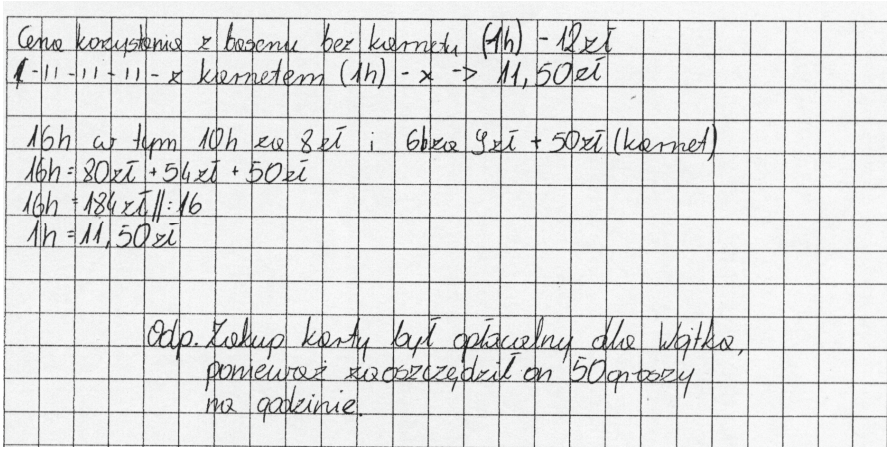

60minut - 12zł
10godzin - 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1 } 8złotych z rabatowym kuponem za 50 zł
następne godziny za kartą rabatową - 9zł
Wojtek pływał 16 godzin za kartę rabatową więc:
10godzin - 8+8+8+8+8+8+8+8+8+8 = 80zł + 50zł za kartę
6 godzin - 9+9+9+9+9+9 = 54zł
134zł za 16 godzin basenu
Gdyby Wojtek nie kupił karty zapłaciłby za 16 godz basenu:
12 · 16 = 192
192 - 184 = 8zł
184zł
Odp: Zakup karty rabatowej był dla Wojtka opłacalny ponieważ dodatkowo zapłacił za kartę 50 zł i tak zaoszczędził 8zł.

Gimnazjaliści rozwiązywali zadania również w nietypowy sposób. Jednym z nich jest metoda prowadząca do wyznaczenia ceny za godzinę korzystania z basenu z uwzględnieniem ulgi i kosztów zakupu karty. Porównanie cen (bez i ze zniżką) za godzinę korzystania z basenu było podstawą sformułowania wniosku. (przykłady 8.-9.)

Przykład 8.


1 h (bez karty) - 12zł
$\frac{10 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 50 = 80 + 54 + 50 = 184 zł}{16} = 11,50 zł$
1h - (z kartą) - 11,50zł
Odp: Zakup miesięcznej karty był dla Wojtka opłacalny. Zaoszczędził on na niej 50 gr. za godzinę.

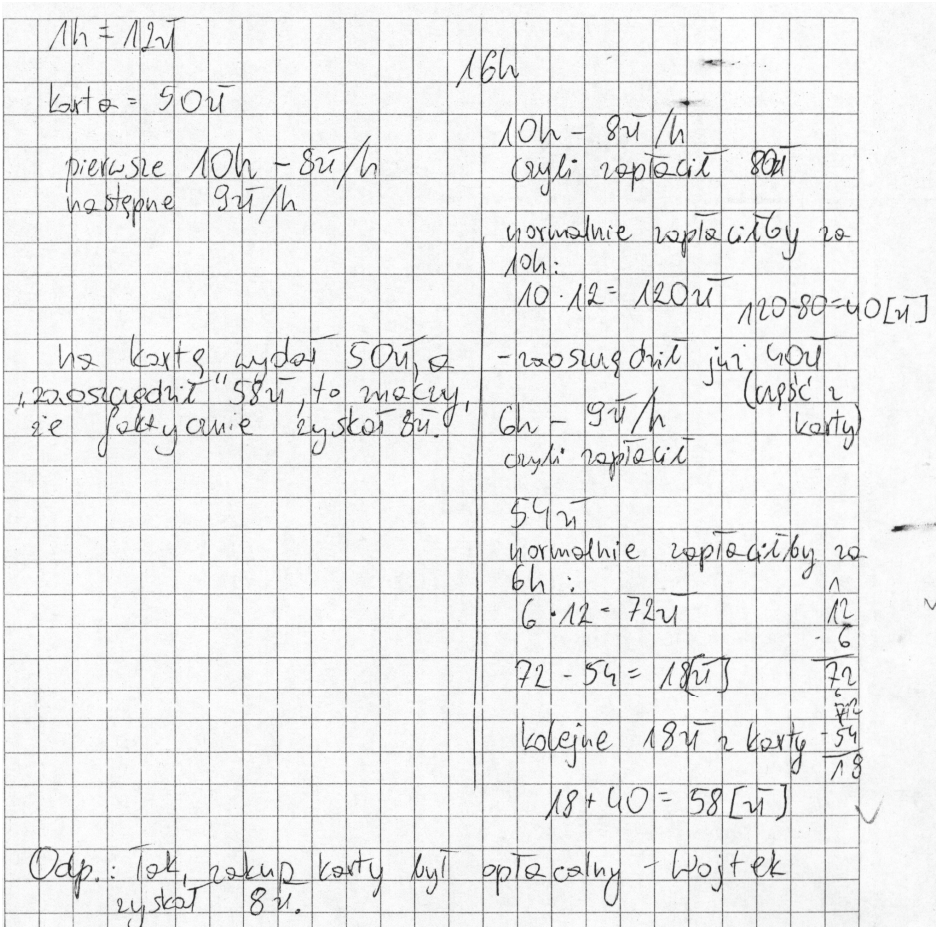
Przykład 9.


Cena korzystania z basenu bez karnetu (1h) - 12zł
1 - " - " - " - z karnetem (1h) - x -> 11,50zł

16h w tym 10h za 8zł i 6h za 9zł + 50zł (karnet)
16h = 80zł + 54zł + 50zł
16h = 184zł // : 16
1h = 11,50zł

Odp. Zakup karty był opłacalny dla Wojtka, ponieważ zaoszczędził on 50 groszy na godzinie.

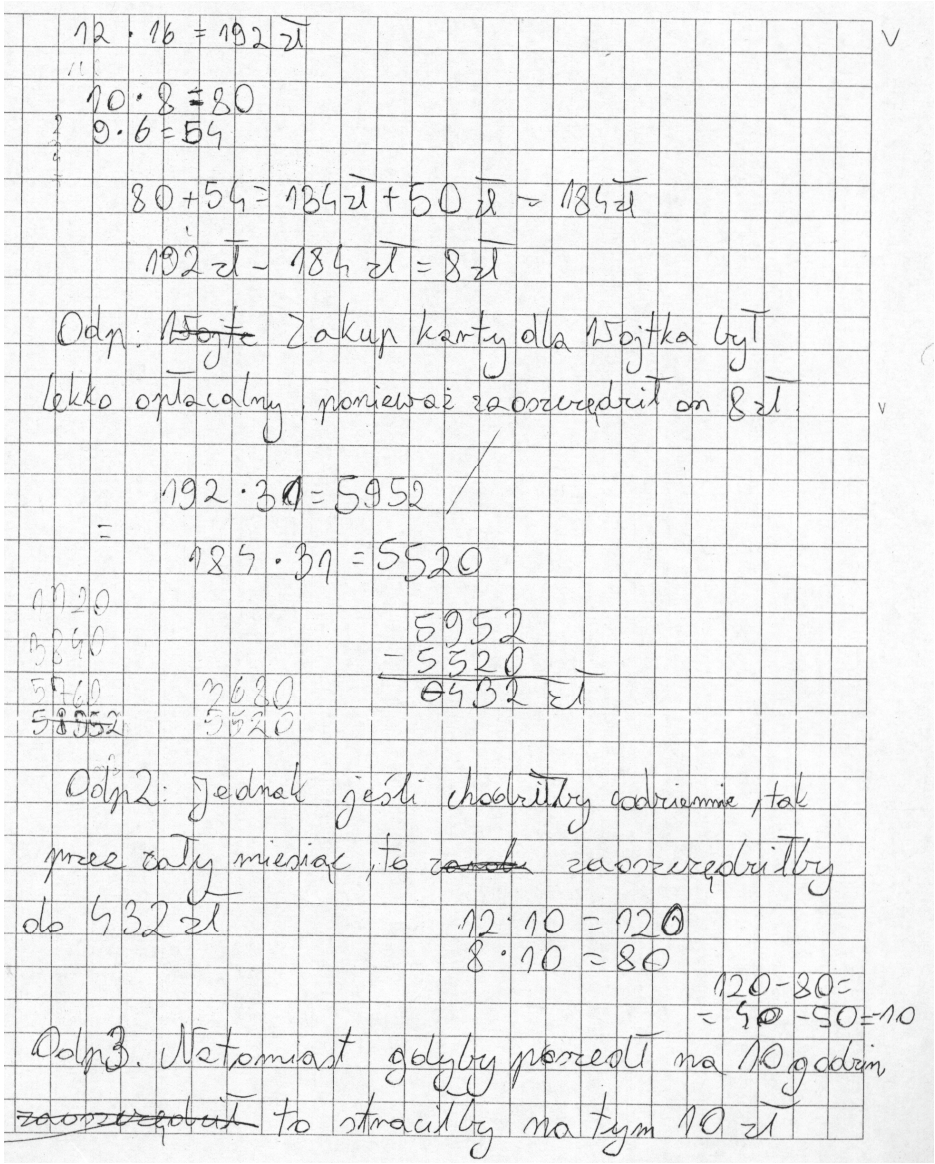
Przykład 10.
Cześć rozwiązań problemu opierała się na obliczeniu kwoty, jaka zostaje zaoszczędzona przy korzystaniu z basenu z uwzględnieniem zniżki w opłatach. Uczniowie porównywali kwotę zaoszczędzoną (58 zł) z kosztem zakupu karty (50 zł) i na tej podstawie formułowali wniosek, że zakup karty był korzystny.


1h = 12zł
karta = 50zł
pierwsze 10h - 8zł/h
następne 9zł/h
na kartę wydał 50zł a „zaoszczędził" 58zł, to znaczy, że faktycznie zyskał 8zł.

16h
10h - 8zł/h
czyli zapłacił 80zł
normalnie zapłaciłby za 10h:
10 · 12 = 120zł
120-80=40[zł]
- zaoszczędził już 40zł (część z karty)
6h - 9zł/h
czyli zapłacił
54zł
normalnie zapłaciłby za 6h:
6 · 12 = 72zł
72 - 54 = 18[zł]
kolejne 18zł z karty
18 + 40 = 58[zł]

Odp.: Tak, zakup karty był opłacalny - Wojtek zyskał 8zł.

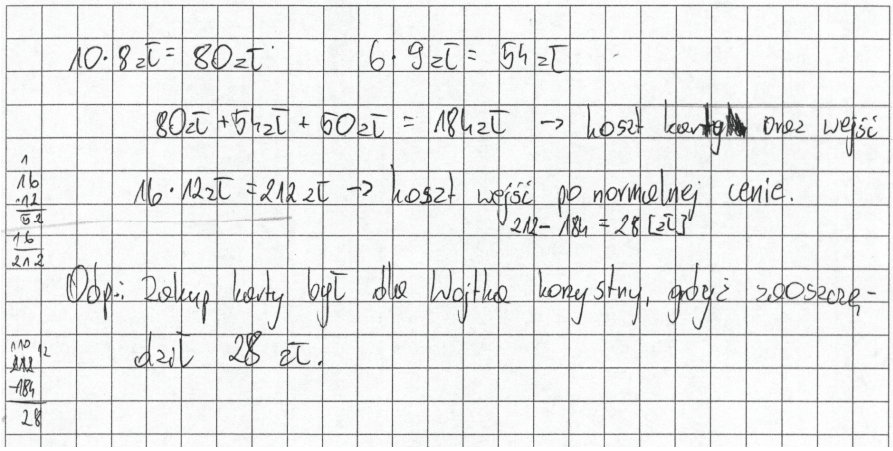
Przykład 11.
Uczeń w rozwiązaniu przedstawił poprawny tok rozumowania. Sformułował właściwy wniosek. Zaprezentowane rozwiązanie zawiera pełną analizę zysków i strat. Ponieważ kwota oszczędności jest równa 8 zł, gimnazjalista udowodnił dalszymi obliczeniami, że korzystając z basenu dłużej niż 16 godzin, zaoszczędziłby większą kwotę. Jednocześnie wskazał, że przy 10 godzinach korzystania z basenu zakup karty rabatowej byłby nieopłacalny.


12 · 16 = 192 zł
10 · 8 = 80
9 · 6 = 54
80 + 54 = 134 zł + 50 zł = 184 zł
192 zł − 184 zł = 8 zł
Odp: ~~15 ojta~~ Zakup karty dla 15 ojtka był lekko opłacalny, ponieważ zaoszczędził on 8 zł.
192 · 30 = 5952
184 · 30 = 5520
5952
− 5520
0432 zł
Odp2: Jednak jeśli chodziłby codziennie, tak przez cały miesiąc, to ~~zaoszc~~ zaoszczędziłby do 432 zł
12 · 10 = 120
8 · 10 = 80
120 − 80 =
= 90 − 50 = 10
Odp3. Natomiast gdyby przeszedł na 10 godzin ~~zaoszczędził~~ to straciłby na tym 10 zł

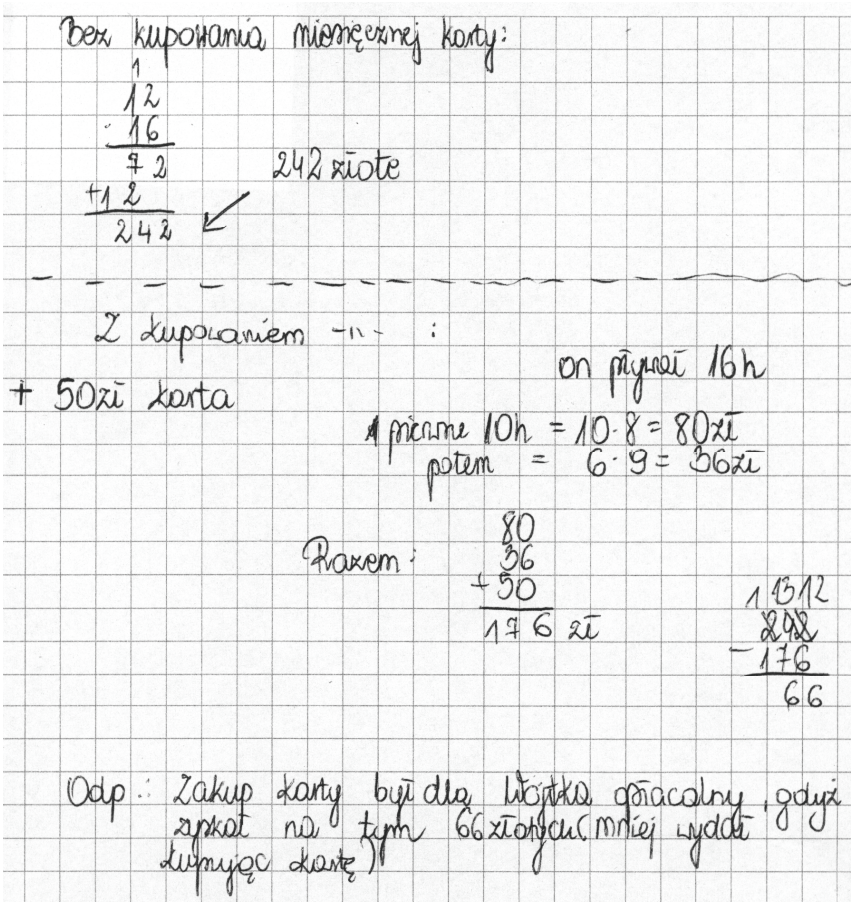
Odpowiedzi częściowo poprawne

W wielu pracach uczniowie stosowali poprawne metody rozwiązania zadania, popełniali jednak błędy rachunkowe, co może świadczyć o tym, że nie mają nawyku sprawdzania poprawności obliczeń. (Przykłady 12.-13.)

Przykład 12.

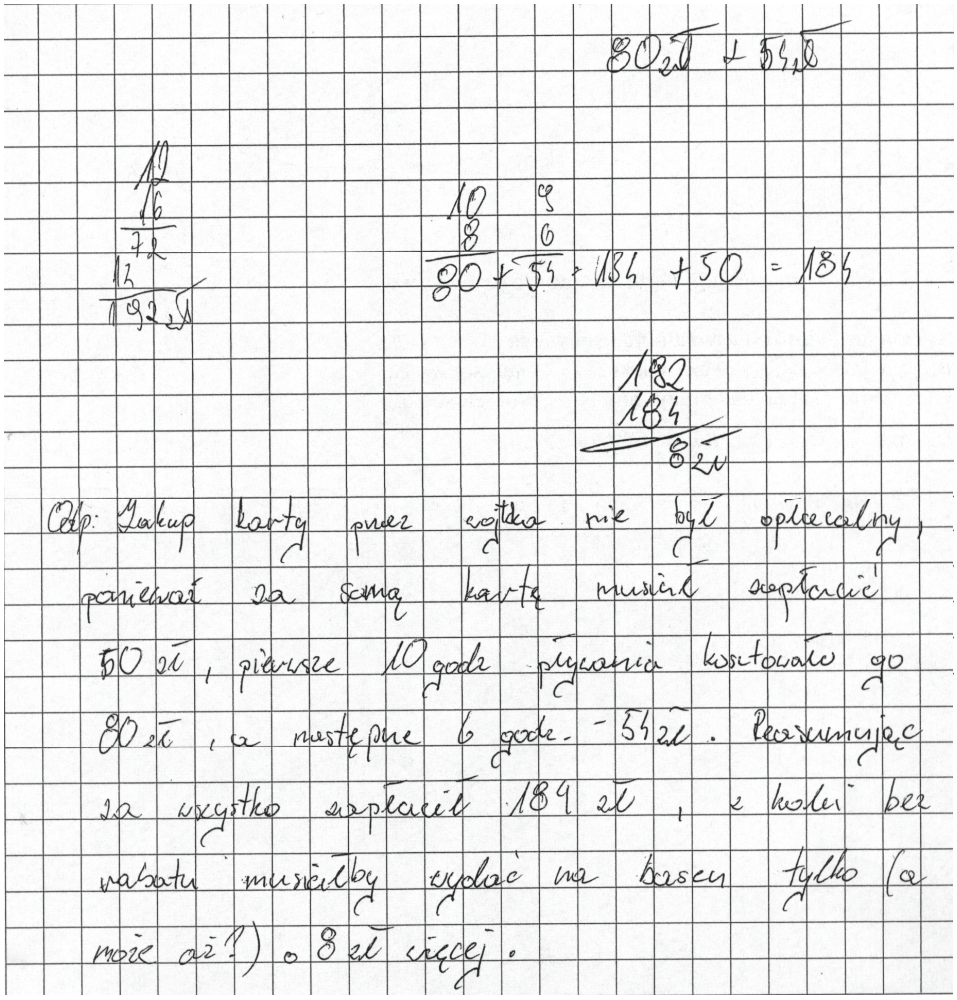

10·8 zł = 80 zł 6·9 zł = 54 zł
80 zł + 54 zł + 50 zł = 184 zł → koszt karty oraz wejść
16·12 zł = 212 zł → koszt wejść po normalnej cenie.
212 − 184 = 28 [zł]
Odp.: Zakup karty był dla Wojtka korzystny, gdyż zaoszczędził 28 zł.

Przykład 13.

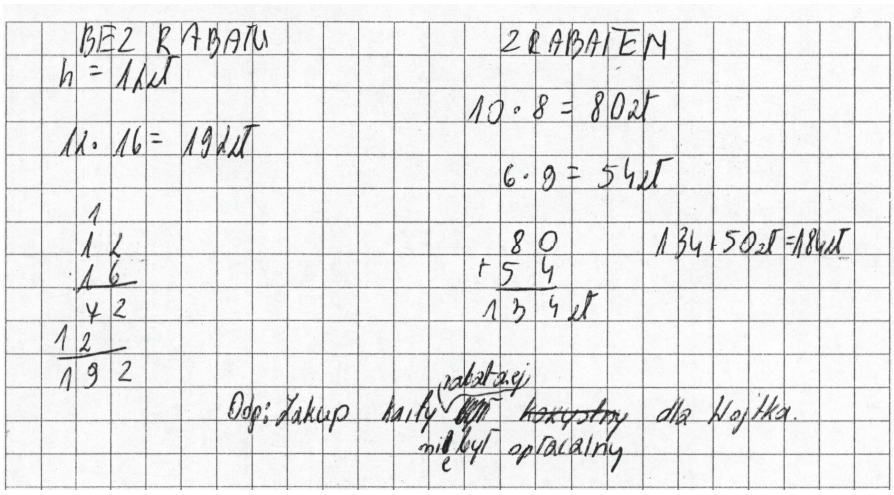

Bez kupowania miesięcznej karty:
12 · 16 = 72 + 12 = 242
242 złote
Z kupowaniem -"- :
+ 50zł karta
on płynął 16h
1 pierwsze 10h = 10·8 = 80zł
potem = 6·9 = 54zł
Razem: 80 + 54 + 50 = 176 zł
242 − 176 = 66
Odp.: Zakup karty był dla Wojtka opłacalny, gdyż zyskał na tym 66 złotych (mniej wydał kupując kartę)

Kolejna kategoria popełnianych błędów związana była z formułowaniem wniosków (porównywanie złych wielkości) lub z nieuprawnionym wnioskowaniem – brak obliczeń będących podstawą interpretacji wyniku. (Przykłady 14.-16.)

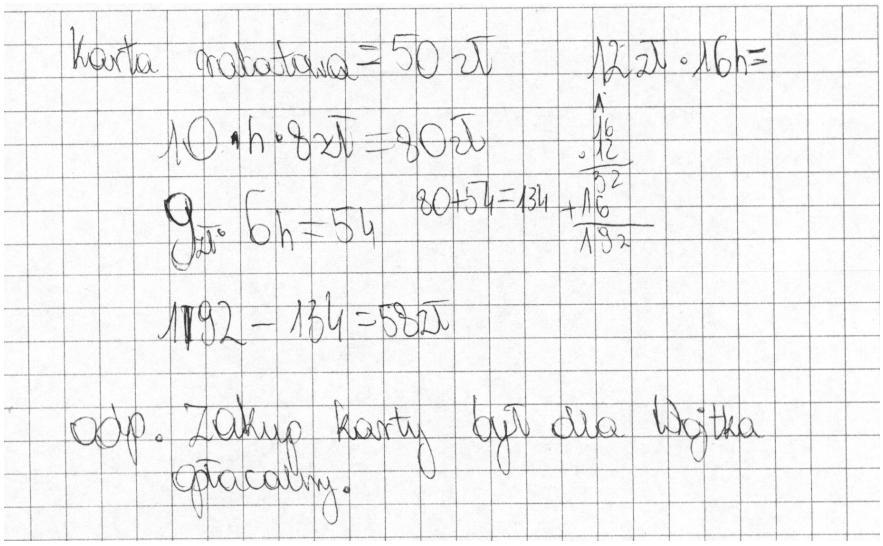
Przykład 14.



Przykład 15.

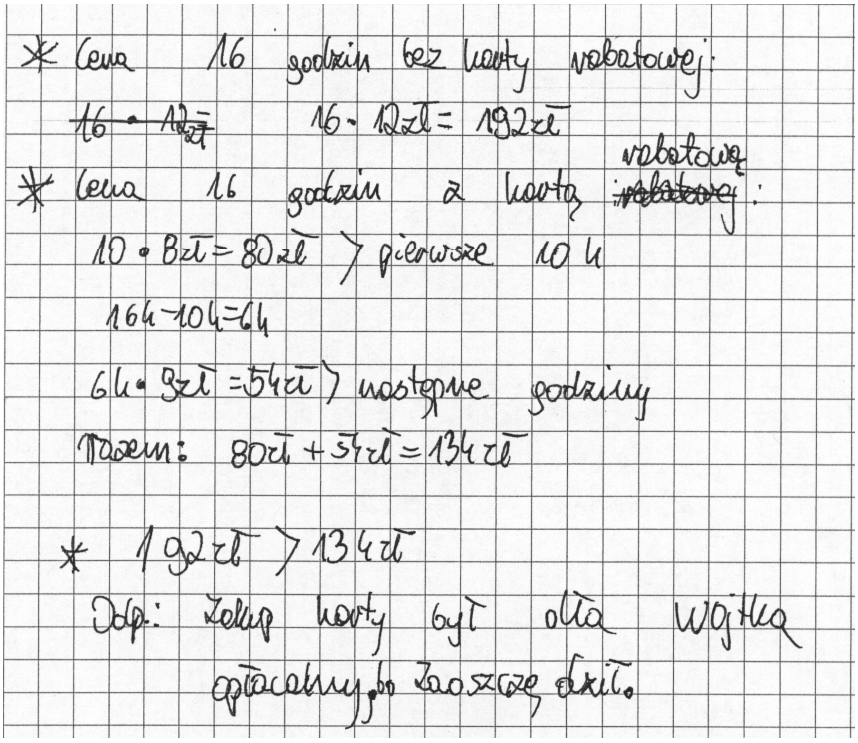


Przykład 16.


karta rabatowa = 50 zł
10 · h · 8 zł = 80 zł
9 zł · 6h = 54
80+54=134
12 zł · 16h =
16 · 12 = 192
192 − 134 = 58 zł
odp. Zakup karty był dla Wojtka opłacalny.

W części prac uczniowie rozwiązywali problem połowicznie – często obliczali koszt korzystania z basenu z uwzględnieniem korzyści związanych z posiadaniem karty rabatowej, lecz nie uwzględniali kosztów zakupu samej karty. (Przykłady 17.-19.)

Przykład 17.


* Cena 16 godzin bez karty rabatowej:
~~16 · 12 zł~~ 16 · 12 zł = 192 zł
* Cena 16 godzin z kartą ~~rabatowej~~ rabatową:
10 · 8 zł = 80 zł > pierwsze 10 h
16 h − 10 h = 6 h
6 h · 9 zł = 54 zł > następne godziny
Razem: 80 zł + 54 zł = 134 zł
* 192 zł > 134 zł
Odp.: Zakup karty był dla Wojtka opłacalny, bo zaoszczędził.

Przykład 18.

Dane:

1 godz - 12 zł - bez karty rabatowej

karta rabatowa - 50 zł

10 godz · 8 = 80 zł - cena pływania przez pierwsze 10 godz
6 · 9 = 54 zł - cena pływania przez następne 6 godz
80 + 54 = 134 zł - razem

12 · 16 = 192 zł - cena za 16 godz. pływania bez karty rabatowej

12
· 16
72
+12
192

192
- 134
68

Odp: Zakup karty dla Wojtka był opłacalny, ponieważ zapłacił o 68 zł mniej niż bez karty rabatowej.

Przykład 19.

1 h — 12 zł

1 miesiąc — 50 zł

12
· 16 x
72
+12
192

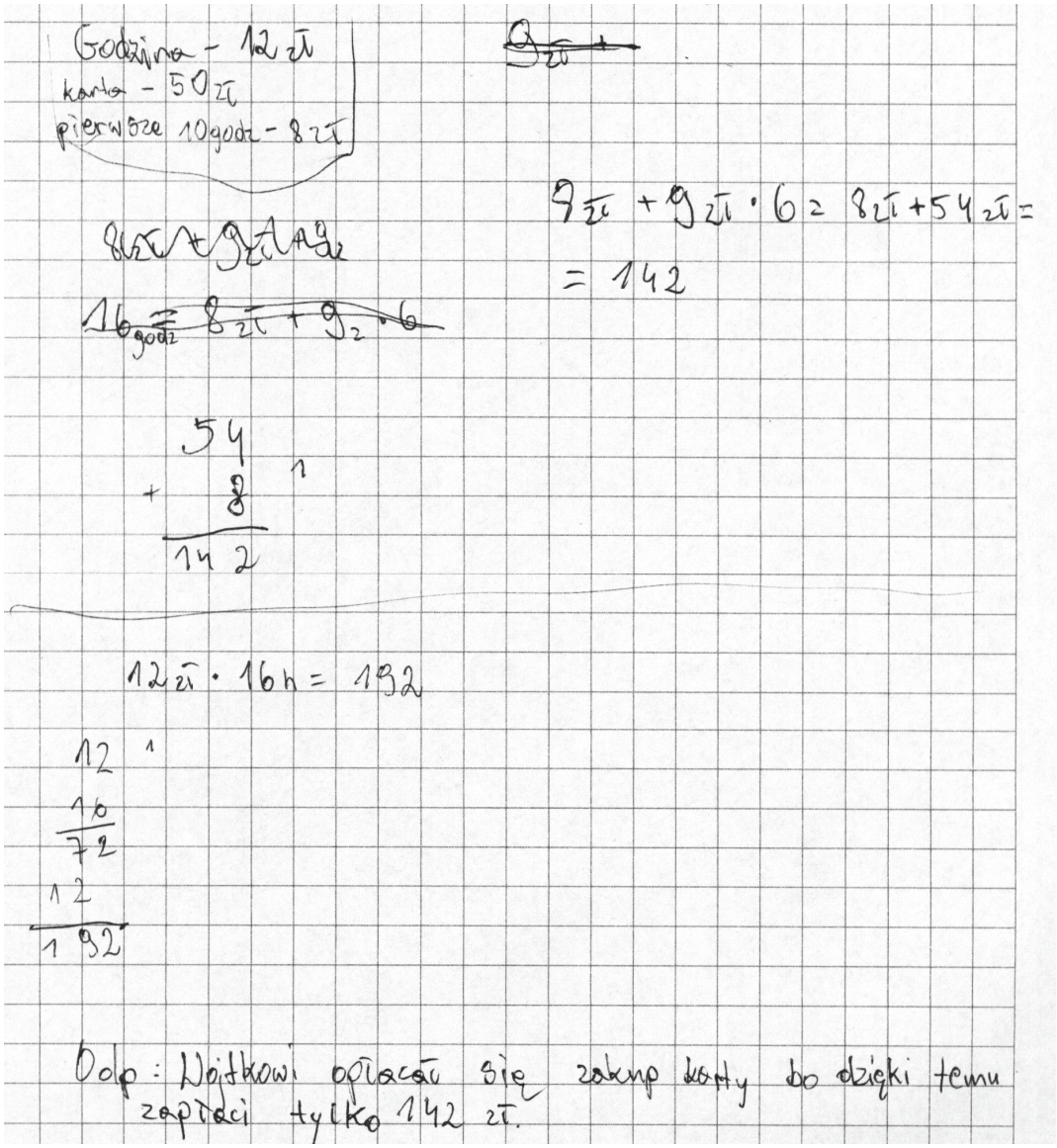
bez karty rabatowej — 192 zł

10 · 8 = 80 | 80 + 9
11 - 89 + 9
12 98 + 9
13 107 + 9
14 116 + 9
15 125 + 9
16 134

karta rabatowa — 134 zł

Odp. Zakup karty rabatowej był dla Wojtka opłacalny

Przykład 20.
W prezentowanym rozwiązaniu uczeń poprawnie obliczył koszt korzystania z basenu bez zniżki. Obliczając koszt korzystania z kartą rabatową nie uwzględnił kosztów jej zakupu. Błędnie zinterpretował informacje dotyczące cen z uwzględnieniem rabatu – uznał, że za 10 godzin korzystania z basenu (posiadając kartę rabatową) należy zapłać łącznie 8 zł.



Przykład 21.
Uczeń obliczył poprawnie koszt korzystania z basenu bez karty. W rozwiązaniu uwzględnił koszt zakupu karty rabatowej, ale poprawnie obliczył koszt korzystania z basenu (z uwzględnieniem zniżki) tylko przez 10 godzin.

16 × 12zł = 192 zł ← cena korzystania z basenu bez promocji
10 × 8 = 80 zł ← cena korzystania z basenu za 10 godz z obniżką cen
12 - 9 = 3 zł ← cena godzin powyżej 10 godzin
3 × 6 godz = 18 zł ← cena wykorzystanych godzin przez Wojtka pow. 10 godz.
80 + 18 + 50 zł = 148 zł ← łączna cena karty rabatowej i 16 godzin z obniżką

148 zł < 192 zł

Odp. zakup karty dla Wojtka był opłacalny, ponieważ 148 zł jest mniejsze od 192.

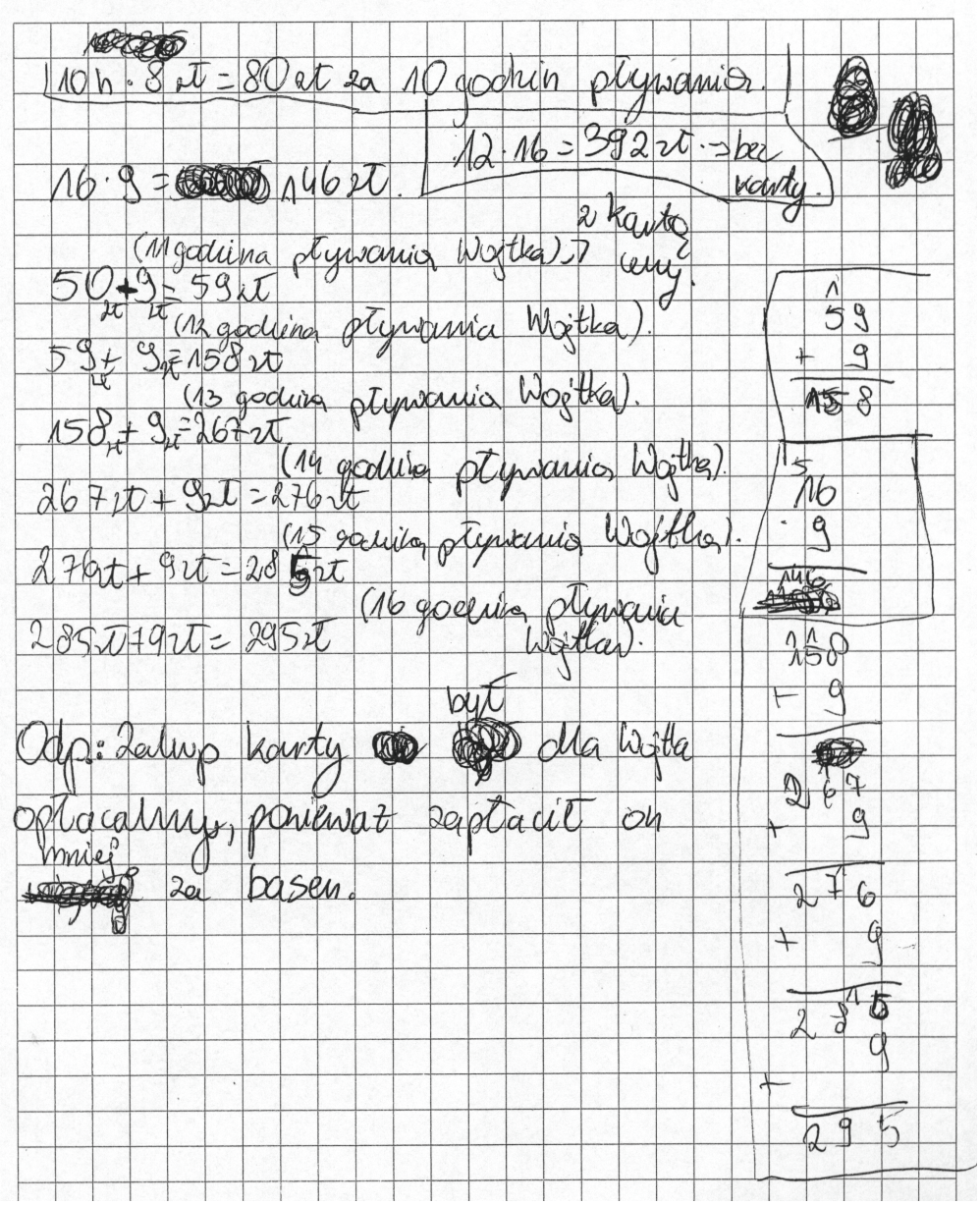
Odpowiedzi błędne

W wielu rozwiązaniach uczniowie nie potrafili zapisać zależności występujących między wielkościami lub błędnie interpretowali zawarte w tekście informacje. Zapisane działania nie prowadziły do rozwiązania problemu, wskazują na brak umiejętności analizy danych. (Przykłady 22.-23.)

Przykład 22.

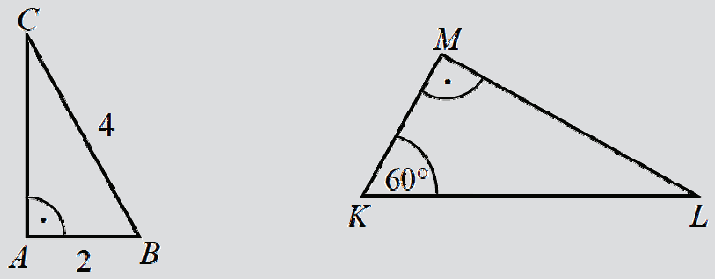
Cena z kartą rabatową:
10h - 8zł
11h - 9zł
12h - 10zł
13h - 11zł
14h - 12zł
15h - 13zł
16h - 14zł
Cena bez kartą rabatowej:
1h - 12zł
2h - 13zł
3h - 14zł
5h - 15zł
6h - 16zł
7h - 17zł
8h - 18zł
9h - 19zł
10h - 20zł
11h - 21zł
12h - 22zł
13h - 23zł
14h - 24zł
15h - 25zł
16h - 26zł
odp. Zakup karty dla Mątka był opłacalny, ponieważ kupując kartę rabatową zaoszczędził 12 zł za 16 godzin pływania i zapłacił 14 zł.

Przykład 23.


10 h · 8 zł = 80 zł za 10 godzin pływania.
12 · 16 = 392 zł ⇒ bez karty.
16 · 9 = 146 zł.
z kartą
(11 godzina pływania Wojtka) ⇒ wy.
50 zł + 9 zł = 59 zł
(12 godzina pływania Wojtka).
59 zł + 9 zł = 158 zł
(13 godzina pływania Wojtka).
158 zł + 9 zł = 267 zł
(14 godzina pływania Wojtka).
267 zł + 9 zł = 276 zł
(15 godzina pływania Wojtka).
276 zł + 9 zł = 285 zł
(16 godzina pływania Wojtka).
285 zł + 9 zł = 295 zł
Odp: Zakup karty byłby dla Wojtka opłacalny, ponieważ zapłacił on mniej za basen.

Zadanie 22. (0-2)

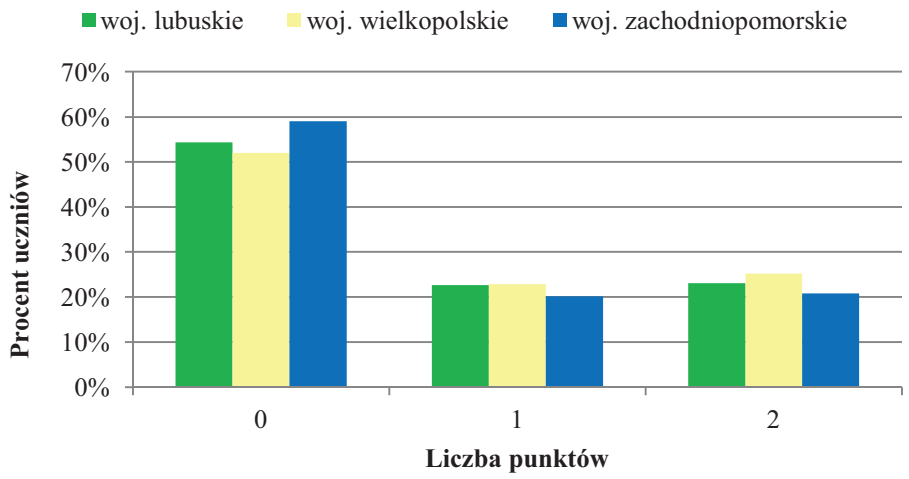
Uzasadnij, że trójkąty prostokątne *ABC* i *KLM* przedstawione na rysunku są podobne.



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)
10. Figury płaskie. Uczeń:
13) rozpoznaje wielokąty przystające i podobne;
15) korzysta z własności trójkątów prostokątnych podobnych.

Poziom wykonania zadania 22.
Maksymalną liczbę punktów (2 pkt) uzyskało 23,7% populacji w Okręgu.
Zero punktów otrzymało 54,2% trzecioklasistów, 15,53% piszących w Okręgu nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 22.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 2 pkt)	0,69 pkt	0,73 pkt	0,62 pkt
Współczynnik łatwości	0,34	0,37	0,31
BO (brak odpowiedzi, w %)	16,26%	14,16%	18,24%
Interpretacja współczynnika łatwości	Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.		



Wykres 12. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 22.*

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi utworzyć łańcuch argumentów i uzasadnić jego poprawność właściwymi twierdzeniami. Do rozwiązania zadania niezbędne były umiejętności:

– rozpoznawanie trójkątów podobnych oraz korzystanie z ich własności,

– stosowanie odpowiedniej własności trójkątów prostokątnych podobnych.

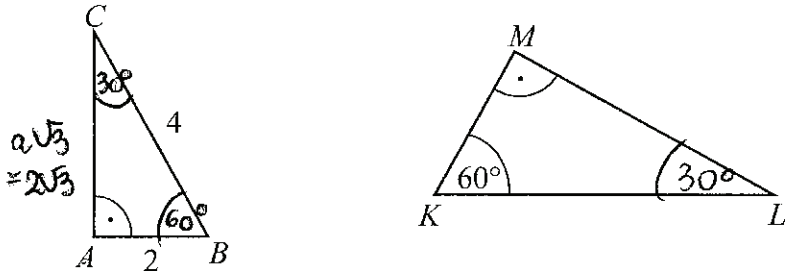
Okazało się, że dla zdających było to jedno z trudniejszych zadań w całym zestawie. Uczniowie nie wykazali się umiejętnością samodzielnego przeprowadzenia prostego rozumowania, składającego się z niewielkiej liczby kroków. Gimnazjaliści mieli trudności z formułowaniem argumentów i wyciąganiem wniosków oraz z zapisywaniem toku swojego rozumowania. Analiza rozwiązań wykazała znaczne problemy w stosowaniu właściwego języka matematycznego.

Zdecydowana większość rozwiązujących zadanie wyznaczała miary kątów w trójkątach bez dalszego wnioskowania. Gimnazjaliści nie potrafili wykorzystać własności trójkątów prostokątnych podobnych.

Rozwiązania uczniowskie

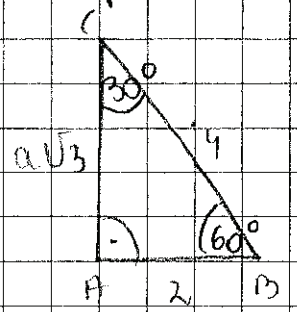
<u>Odpowiedzi poprawne</u>

Przykład 1.
Rozwiązanie bezbłędne, z dokładnie opisanym rozumowaniem. Czytelność i jednoznaczność stosowanych zapisów i obliczeń wskazuje na właściwe wykorzystanie wiedzy do rozwiązania problemu.



Trójkąty są podobne, ponieważ:

- mają kąt 60° i 30°.
- w pierwszym rysunku wyliczamy trzeci bok co pozwala na poznanie kąta 60°

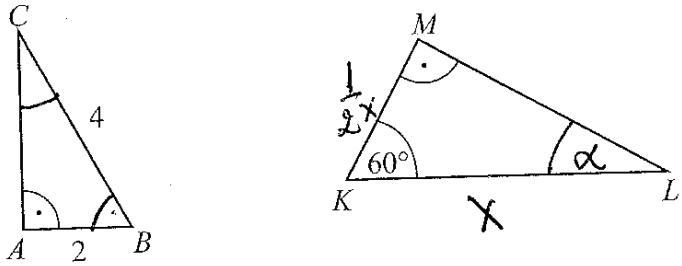


$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

dlatego przy punkcie B jest kąt 60°, a przy C kąt 30°

Taka sama sytuacja będzie z kątami w rysunku 2.

Przykład 2.
Uczeń wyznacza proporcjonalności odpowiednich boków, a następnie zapisuje wniosek, dotyczący równości miar kątów trójkątów ABC oraz KLM.
W rozwiązaniu uczeń zaprezentował uporządkowany, czytelny zapis zawierający poprawnie stosowane symbole matematyczne. Są to ważne elementy rozwiązania zadań, w szczególności związanych z uzasadnianiem lub dowodzeniem.



$|AB| = 2$
$|BC| = 4$
$\sphericalangle BAC = 90°$

$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

~~$|AB| = \frac{1}{2} \cdot 1$~~

$|BC| \cdot \frac{1}{2} = |AB|$

$\sphericalangle KML = 90°$
$\sphericalangle LKM = 60°$
$\alpha + \sphericalangle KML + \sphericalangle LKM = 180°$
$\alpha + 90° + 60° = 180°$
$\alpha = 30°$

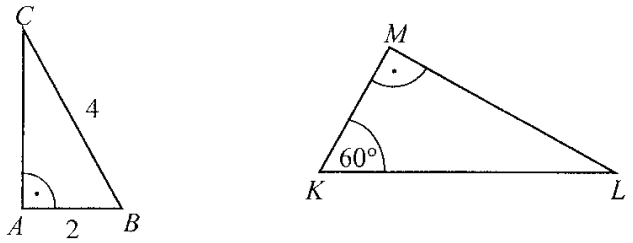
$|KL| = x$
$|KM| = \frac{1}{2}x$

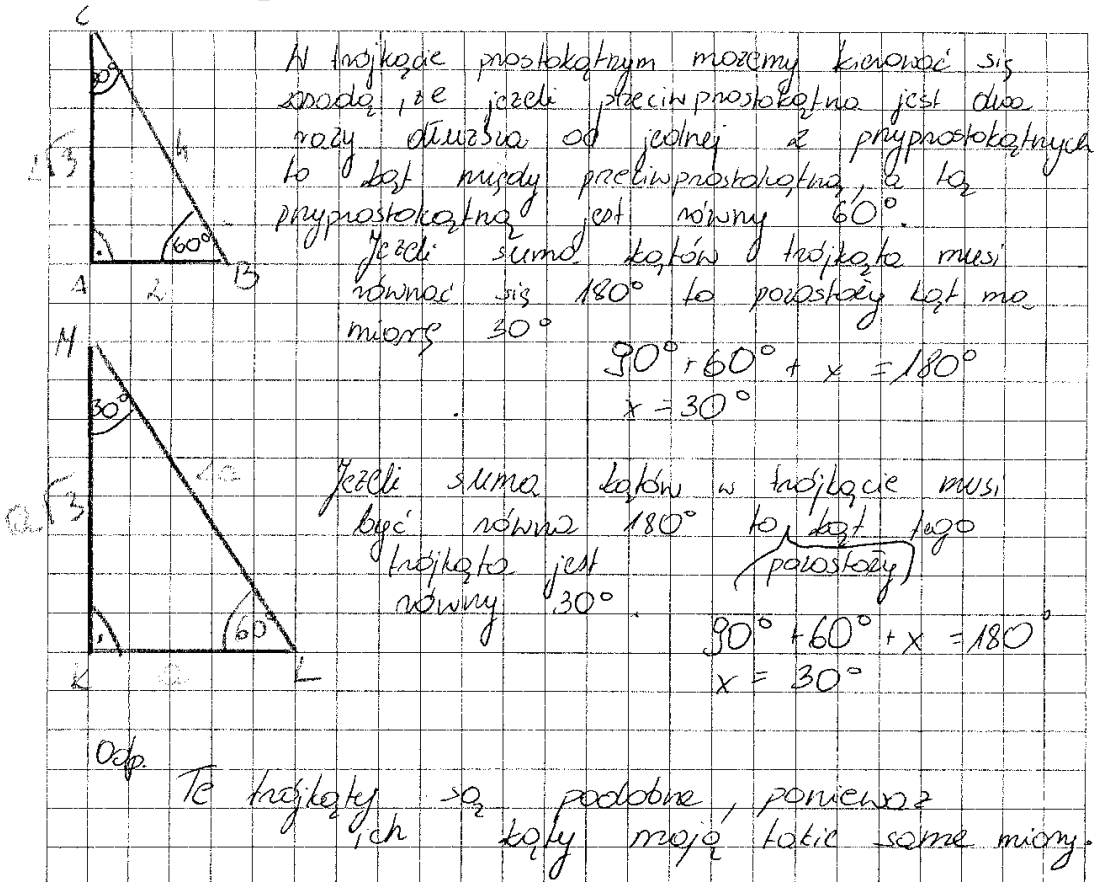
$|KL| \cdot \frac{1}{2} = |KM|$

Te trójkąty są podobne, ponieważ stosunek boków $|BC|$ do $|AB|$ jest taki sam jak stosunek boków $|KL|$ do $|KM|$ oraz trójkąt ABC i KLM mają kąt o takiej samej wartości

Podobieństwo trójkątów: bok, bok, kąt

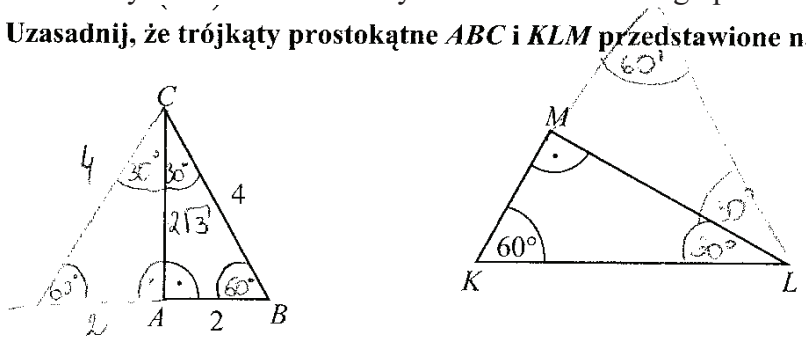
Przykład 3.
Uczeń stosuje posiadaną wiedzę i umiejętnie odnosi ją do rozwiązania problemu. Rozwiązanie poprawne, z pełnym uzasadnieniem w formie czytelnego, jednoznacznego opisu słownego.





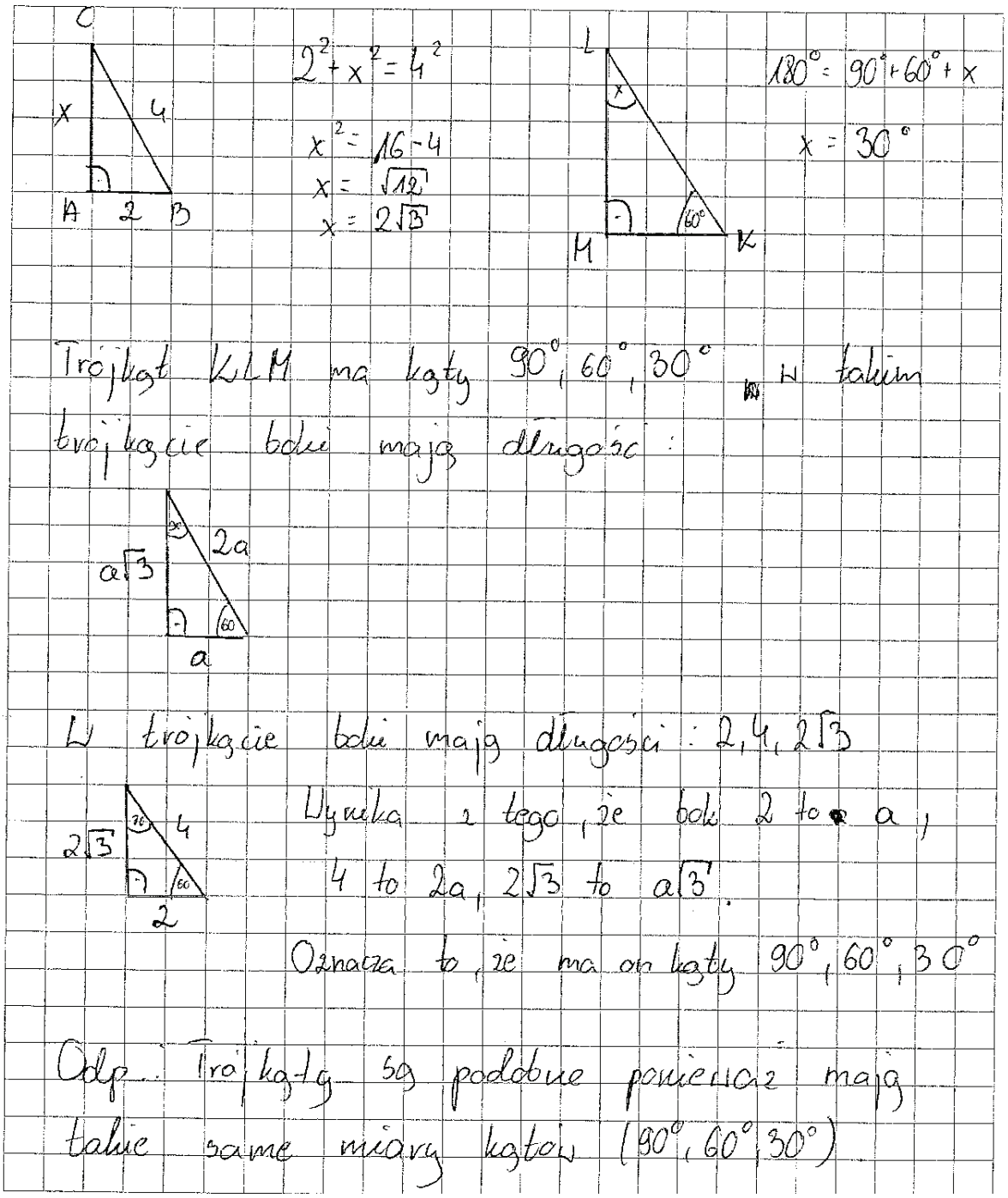
Przykład 4.
Przedstawione rozumowanie świadczy o opanowaniu umiejętności związanej z właściwym wykorzystaniem własności trójkątów, w tym trójkątów równobocznych i prostokątnych. Pomimo że zastosowany w opisie język matematyczny jest dość „uczniowski” i nieporadny, przedstawiony komentarz świadczy o zrozumieniu danego problemu.

Uzasadnij, że trójkąty prostokątne *ABC* i *KLM* przedstawione na rysunku są podobne.



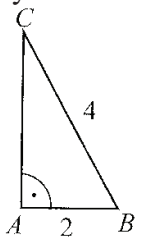
Suma kątów w trójkącie ~~m~~ wynosi 180°.
W obu trójkątach na rysunkach podany jest kąt prosty, który ma 90°. W trójkącie MKL podana jest jeszcze ~~drugi~~ ~~druga~~ informacja, że drugi z kątów ma 60°. Odejmując od 180° ~~miary wiadomych~~ sumę miar wiadomych kątów (180° − (60° + 90°)), dowiadujemy się, że trzeci kąt wynosi 30°. Jeżeli w trójkącie CAB dorysujemy jego drugą połowę dowiemy się, iż jest to trójkąt równoboczny. ~~Połowa trójkąta~~ ~~Na rysunku wyżej (trójkąt ACB) zapisać możnaby~~ ~~jego pozostałe miary kątów~~. Jeżeli zatem do rysunków trójkątów dopisaliśmy ich drugą połówkę, dowiedzieliśmy się, że oba te trójkąty są połówkami trójkątów równobocznych. Te trójkąty są podobne, bo mają takie same miary kątów ΔCAB = 90°, 30°, 60° i Δ MKL 90°, 30°, 60°.

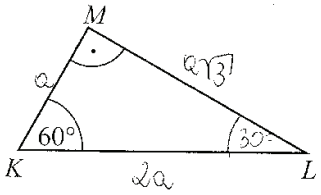
Przykład 5.
Uczeń przedstawia poprawne uzasadnienie w oparciu o obliczenia długości boków trójkątów ABC oraz KLM. Wykorzystuje przy tym prawidłowo twierdzenie Pitagorasa, jak i własności trójkątów o miarach kątów 30°, 60°, 90°. Uzasadnienie zostało opracowane wyczerpująco, z wykorzystaniem rysunków pomocniczych oraz logicznego i uporządkowanego zapisu.

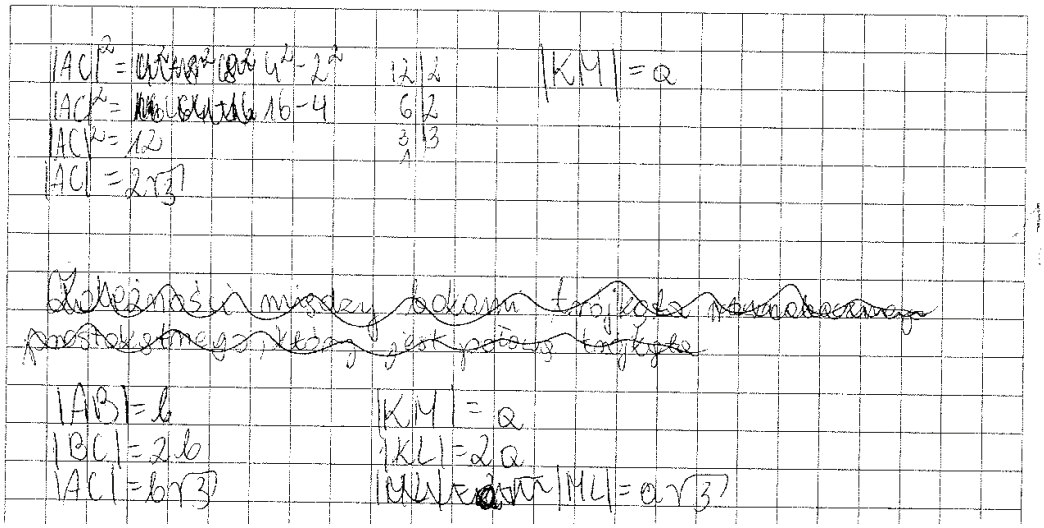


<u>Odpowiedzi częściowo poprawne</u>

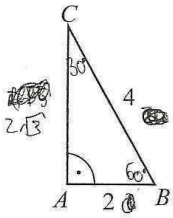
Przykład 6.
Uczeń zapisuje właściwą zależność między długościami boków w trójkątach ABC oraz KLM. Prowadzi dwie drogi rozumowania, poparte prawidłowymi obliczeniami, ale nie potrafi właściwie łączyć faktów i tym samym nie doprowadza do końcowego uzasadnienia.

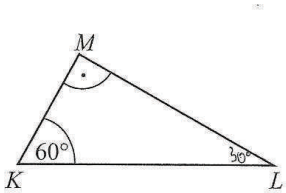


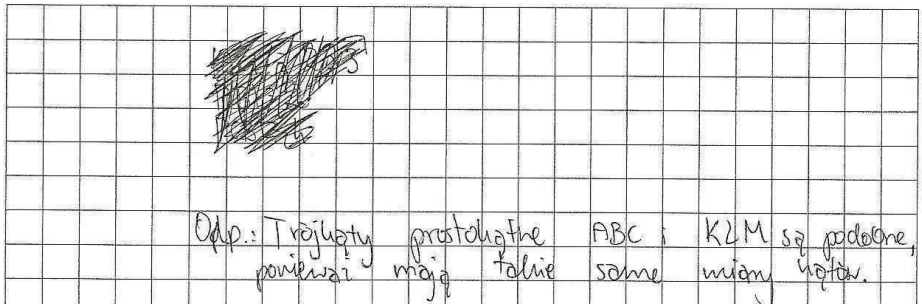




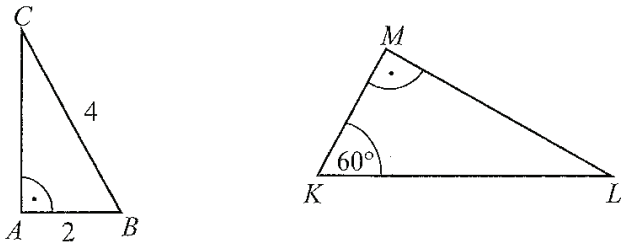
Przykład 7.
Uczeń posiada określona wiedzę dotyczącą trójkątów równobocznych i prostokątnych – właściwie przedstawia miary kątów i długość wysokości w trójkącie ABC. Nie potrafi natomiast podać jednoznacznego uzasadnienia. W sposób bardzo intuicyjny przedstawia rozwiązanie, które jest częściowo poprawne.







Przykład 8.
Zapisy pozwalają odczytać miary kątów w trójkącie KLM oraz ABC. Uczeń zapisuje także wniosek. W rozwiązaniu brakuje jednoznacznego powiązania przedstawionych zapisów, można odnaleźć próby działań, związanych z obliczeniem pola trójkąta. Nie są one jednak dalej wykorzystywane i nie mają wpływu na końcowy wniosek. Można je uznać jako nadmiar obliczeń.



$\triangle ABC$:

$x^2 + 2^2 = 4^2$

$x^2 + 4 = 16 \quad /-4$

$x^2 = 12 \quad /\sqrt{\ }$

$x = \sqrt{12}$

$P = \frac{\sqrt{12} \cdot 2}{2} = \sqrt{12}\ cm^2$

$\triangle ABC$ ∢ =

$90^0 +$

$\triangle KLM$ ∢

$90^0 + 60^0 + 30^0 = 180^0$

Trójkąty ABC i KLM są podobne, ponieważ:

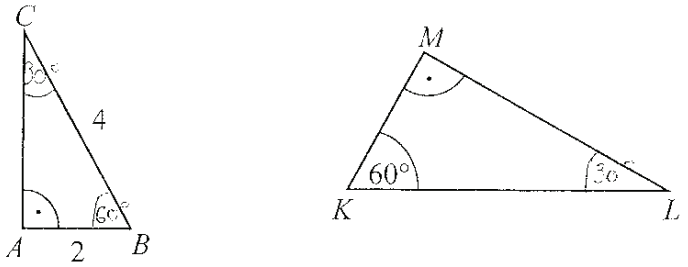
∢ CAB = ∢ KML

~~∢ MLK = L~~

∢ ACB = ∢ MLK

∢ ABC = ∢ MKL

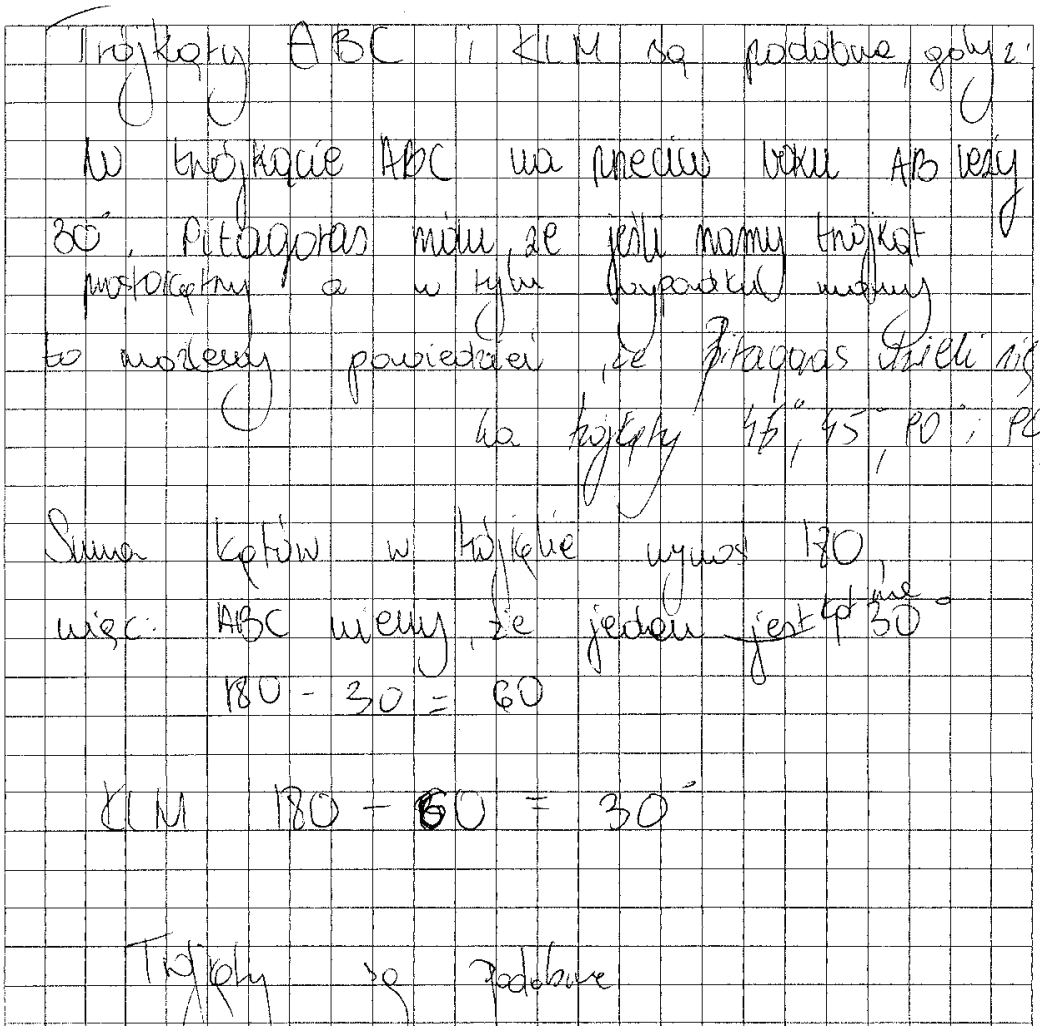
Przykład 9.
Uczeń prawidłowo wyznacza miary kątów w trójkątach. Nie przedstawia jednak żadnych obliczeń ani zapisów.
Ze względu na brak uzasadnienia wyznaczenia miar kątów w trójkącie ABC, rozwiązania zadania nie można uznać jako w pełni poprawne. Dowodzi, że uczniom trudno dokonywać uzasadnienia tzw. „faktów oczywistych".



Odp. Trójkąty ABC i KLM będą podobne, ponieważ mają te same wymiary kątów.

Odpowiedzi błędne

Przykład 10.
Rozwiązanie wskazuje, że uczeń nie ma wykształconego prawidłowego rozumowania związanego z wykorzystaniem własności trójkątów. Jedyna poprawna zależność, którą przedstawia, dotyczy sumy miar kątów w trójkącie. Rozwiązanie jest chaotyczne i całkowicie błędne.

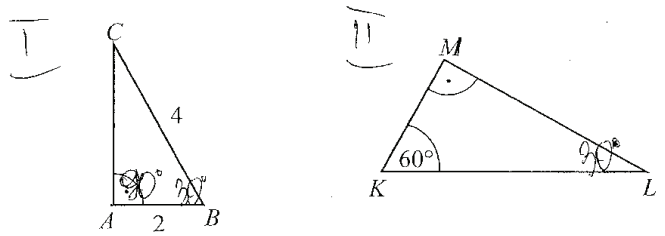

Trójkąty ABC i KLM są podobne, gdyż
w trójkącie ABC na przeciw boku AB leży
30°. Pitagoras mówi, że jeśli mamy trójkąt
prostokątny a w tym przypadku mamy
to możemy powiedzieć, że Pitagoras dzieli się
na kąty 45°, 45°, 90°; 90°, 30°, 60°

Suma kątów w trójkącie wynosi 180,
więc: ABC wiemy, że jeden kąt jest 30°
180 - 30 = 60

KLM 180 - 60 = 30°

Trójkąty są podobne

Przykład 11.
Uczeń błędnie wskazuje miarę kąta 30° w trójkącie ABC stąd jego uzasadnienie jest niepoprawne merytorycznie.



I 180° − (90° + 30°) = 180° − 120° = 60°
II 180° − (60° + 30°) = 180° − 90° = 90°

Trójkąty prostokątne ABC i KLM są które są przedstawione na rysunku są podobne ponieważ mają taką samą miarę kątów.

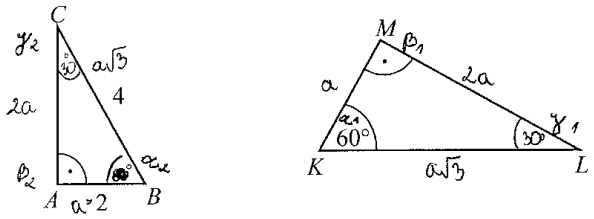
Przykład 12.
Rozwiązanie przedstawia zapisy i rachunki, z których nic nie wynika. Brak zaprezentowania jakiejkolwiek metody, która wskazywałaby na chociażby częściowe zrozumienie problemu przedstawionego w zadaniu.

Cechy podobieństwa trójkątów
bkb, kbk, bbb

ABC = KLM
kbk
KLM = 90° + 60° = 150°
180° − 150° = 30°
ABC = 90°
180° − 90° = 90°
60° + 30° = 90°

Odp: Trójkąty są podobne.

Przykład 13.
Uzasadnienie oparte na obliczeniach długości danych boków. Przejrzystość zapisów może sugerować poprawne rozwiązanie zadania. Niestety długość boku AC w trójkącie ABC, jak i długości boków KL oraz LM w trójkącie KLM, są błędnie przyporządkowane. Stąd też wynika brak właściwej proporcjonalności. Przedstawione zatem końcowe uzasadnienie nie może być odniesione do wcześniejszych zapisów jako poprawne.

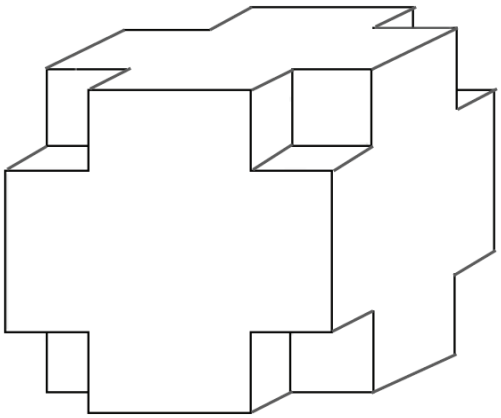


kąt $\alpha_1 = \alpha_2$ $|AB| = a$
$\beta_1 = \beta_2$ $|MK| = a$
$\gamma_1 = \gamma_2$ $|AC| = 2a$
$|ML| = 2a$
$|CB| = a\sqrt{3}$
$|KL| = a\sqrt{3}$

Odp. Te trójkąty są podobne bo mają takie same kąty i takie same boki

Zadanie 23. (0-3)

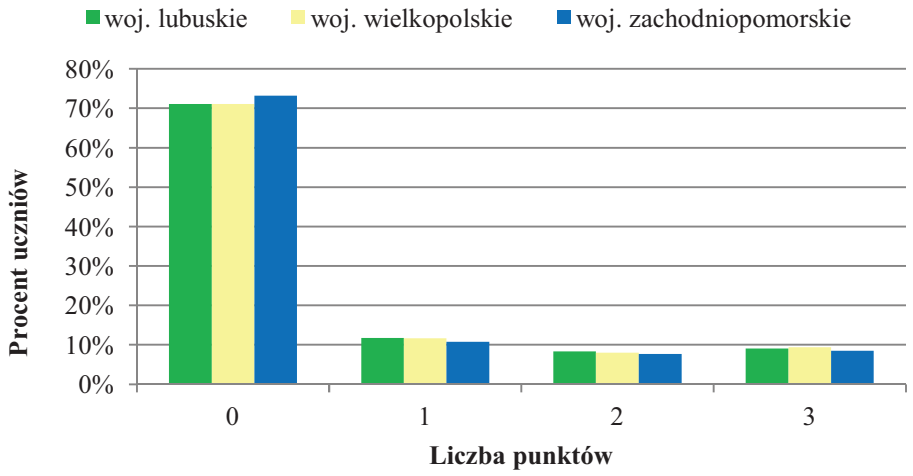
Z sześcianu zbudowanego z 64 małych sześcianów o krawędzi 1 cm usunięto z każdego narożnika po jednym małym sześcianie (patrz rysunek). Oblicz pole powierzchni powstałej bryły i porównaj je z polem powierzchni dużego sześcianu. Zapisz obliczenia.



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)
11. Bryły. Uczeń:
2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Poziom wykonania zadania 23.
Maksymalną liczbę punktów (3 pkt) uzyskało 9,1% gimnazjalistów w Okręgu.
Zero punktów otrzymało 71,6% trzecioklasistów w Okręgu, 21% piszących nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 23.	**L**	**W**	**Z**
Średnia liczba punktów (max – 3 pkt)	0,55 pkt	0,56 pkt	0,51 pkt
Współczynnik łatwości	0,18	0,19	0,17
BO (brak odpowiedzi, w %)	23,42%	19,06%	23,71%
Interpretacja współczynnika łatwości	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów bardzo trudne.**		



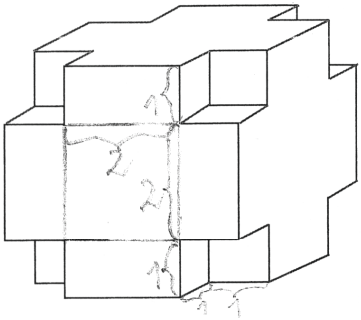
Wykres 13. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 23.*

Komentarz
Zaplanowanie i zrealizowanie strategii rozwiązania problemu, wykorzystując przy tym zintegrowaną wiedzę, to ważna umiejętność w życiu każdego człowieka.
Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi zaplanować czynności prowadzące do rozwiązania zadania, a następnie je wykonać. Rozwiązanie zadania polegało na obliczeniu pola powierzchni bryły, która powstała z sześcianu w sposób opisany w treści zadania. Wyznaczone pole powierzchni należało następnie porównać z polem powierzchni sześcianu, z którego bryła powstała.
Aby poprawnie rozwiązać zadanie, należało ustalić długość krawędzi sześcianu, następnie obliczyć pole powierzchni sześcianu. Kolejny krok to ustalenie sposobu obliczenia pola powierzchni bryły po usunięciu narożników. W tym celu uczniowie różnymi metodami wyznaczali pole powierzchni ściany po usunięciu narożników. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń lub przedstawionego toku rozumowania piszący formułowali wniosek dotyczący równości pól powierzchni obu brył.
Do rozwiązania zadania niezbędne były następujące wiadomości i umiejętności:
- *rozumienie pojęcia pola powierzchni: całkowitej, bocznej i podstawy,*
- *stosowanie sposobu obliczenia pola powierzchni kwadratu, prostokąta.*

Rozwiązania uczniowskie
Poprawne rozwiązanie tego zadania wymagało wykonania trzech kroków (w odpowiedniej kolejności): wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu, obliczeniu pola powierzchni sześcianu oraz powstałej bryły oraz sformułowania wniosku, dotyczącego pól obu brył. Rozwiązania mogły się różnić jedynie sposobami obliczeń.

<u>Odpowiedzi poprawne</u>

Przykład 1.
Pełne rozwiązanie z przejrzystymi zapisami odzwierciedlającymi tok rozumowania. Poprawne obliczenie pola powierzchni sześcianu. Aby wyznaczyć pole powierzchni nowej bryły, uczeń oblicza pole powierzchni ściany w kształcie krzyża oraz pola ścianek, które powstały po usunięciu narożników. Zapisuje wniosek wynikający z porównani obliczonych pól powierzchni.



mały sześcian:
$V = a^3$
$a = 1\,cm$
$V = 1^3 = 1\,cm^3$
$1\,cm^3 \cdot 64 = 64\,cm^3$

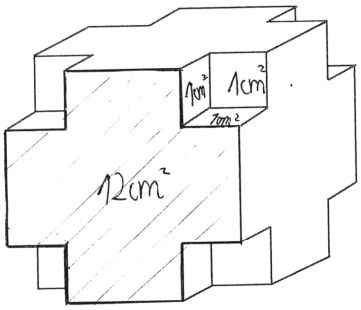
duży sześcian:
$V = a^3$
$V = 64\,cm^3$
$a^3 = 64 \quad \sqrt[3]{\ }$
$a = 4\,cm$

$P_c = 6a^2$
$a = 4\,cm$
$P_c = 6 \cdot 4^2$
$P_c = 6 \cdot 16$
$P_c = 96\,cm^2$ – pole powierzchni dużego sześcianu

Pole nowej bryły:
$6 \cdot (\overset{2}{2 \cdot 2} + \overset{8}{4 \cdot 2 \cdot 1}) + 8 \cdot \underbrace{3 \cdot 1}_{\text{pole 3 kwadratów powstałych z usunięcia sześcianów}} =$
pole powstałego „krzyża" z usunięcia sześcianów
$= 6 \cdot 12 + 24 = 72 + 24 = 96\,cm^2$
– pole nowej bryły

Odp. Pole dużego sześcianu oraz pole powstałej bryły są równe.
$96\,cm^2 = 96\,cm^2$

Przykład 2.
Rozwiązanie opatrzone komentarzami – opisany każdy krok prowadzący do rozwiązania zadania.



~~Duży sześcian:~~
~~$\sqrt[3]{64} = 4$~~
~~$4cm \cdot 4cm \cdot 4cm = 64cm^3$~~

~~Powstała bryła:~~
~~$64cm^3 - 8cm^3 = 56cm^3$~~

~~$64cm^3 - 56cm^3$~~

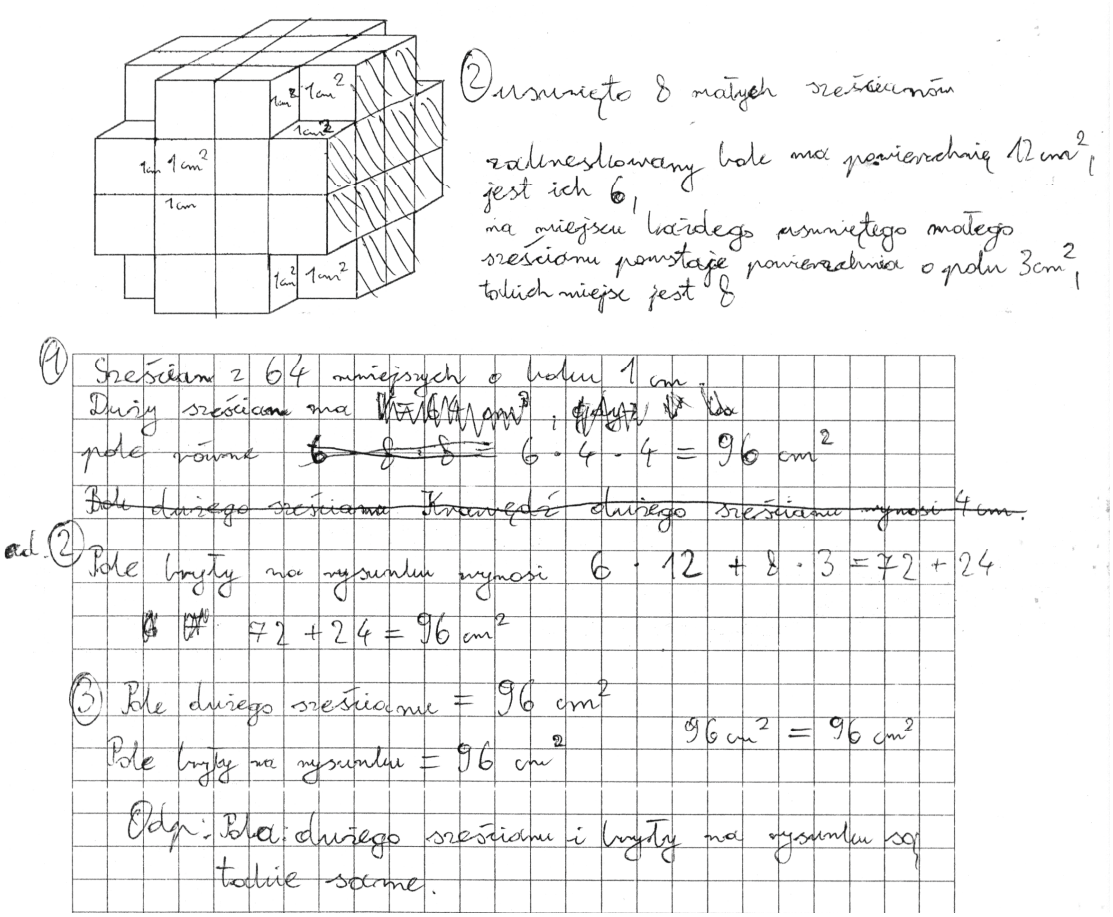
Duży sześcian:
Ilość małych sześcianów przy jednej krawędzi: $\sqrt[3]{64} = 4$
Pole powierzchni jednej ściany: $4 \cdot 4 = 16[cm^2]$
Pole powierzchni całej bryły: $16 \cdot 6 = 96[cm^2]$

Powstała bryła:
Pole powierzchni ściany w kształcie krzyża: $16[cm^2] - 4[cm^2] = 12[cm^2]$
Pole powierzchni ~~pozostałym ścian~~ wszystkich ścian w kształcie krzyża: $6 \cdot 12 = 72[cm^2]$
Pole powierzchni pozostałych ścian: $24 \cdot 1 = 24[cm^2]$
Pole powierzchni całej bryły: $72 + 24 = 96[cm^2]$

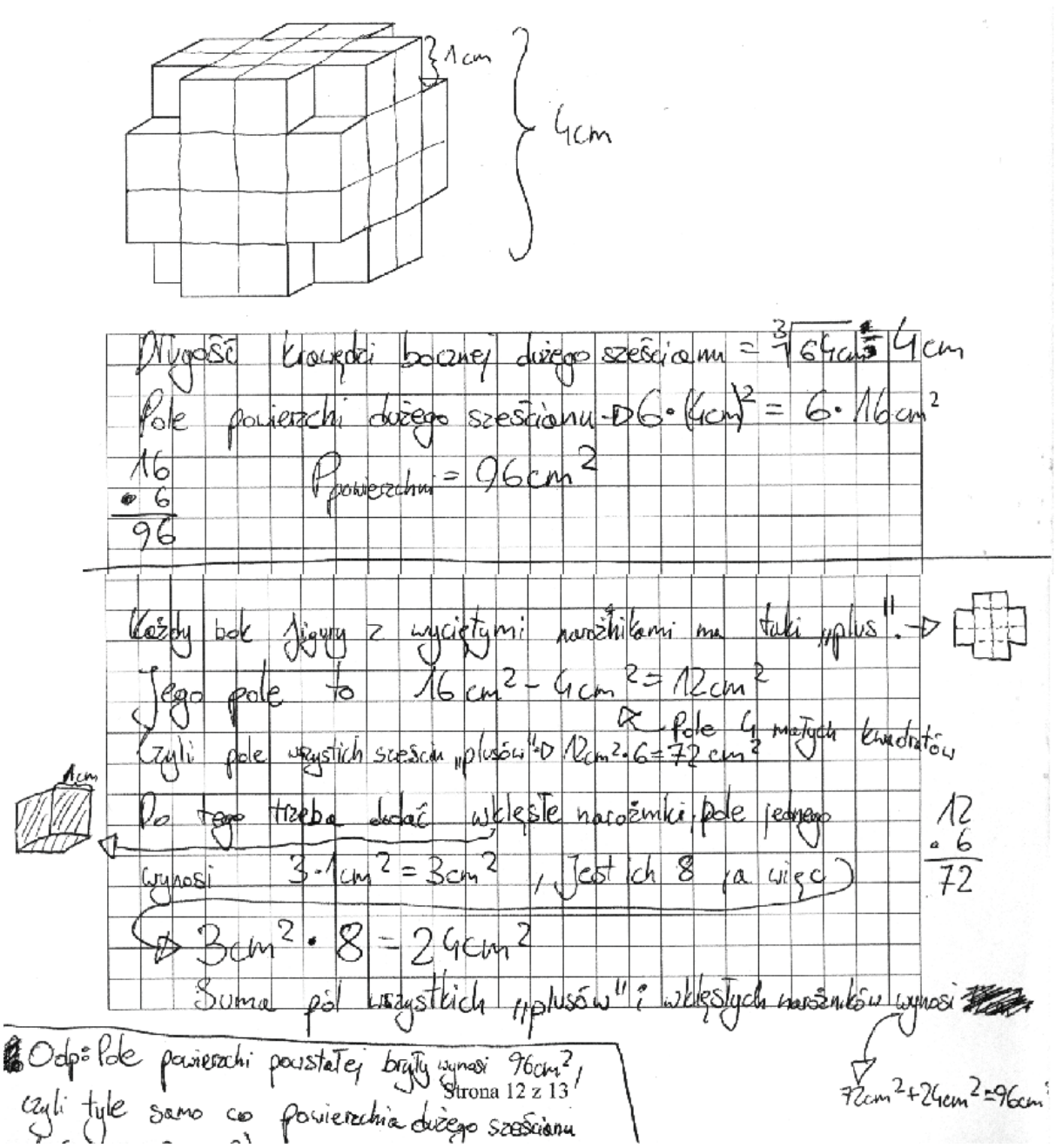
Odpowiedź: Pola powierzchni obydwóch brył (są równe i) wynoszą $96cm^2$.

Rozwiązania uczniów różnią się sposobem obliczenia pola powierzchni ściany po usunięciu narożników. Stosowano następujące metody: podział ściany na jednostkowe kwadraty (Przykłady 3.- 4.) lub prostokąty (Przykłady 5.- 6.).

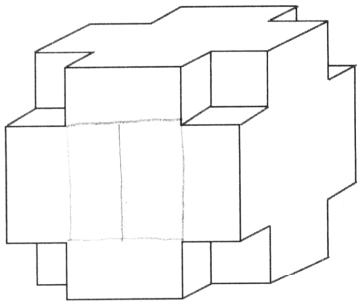
Przykład 3.
Rozwiązanie zadania z komentarzem – pełna analiza zadania, opisane kolejne kroki prowadzące do rozwiązania wraz z obliczeniami.



Przykład 4.
Podobny tok rozumowania jak w przykładzie 3. Uczeń także umieścił komentarze do rozwiązania. Pole powierzchni ściany w kształcie krzyża oblicza, odejmując od pola „dużej” ściany pole powierzchni wyciętych narożników (16 cm^2 – 4 cm^2 = 12 cm^2).



Przykład 5.
Kolejna z metod prowadzących do obliczenia pola powierzchni ściany w kształcie krzyża, to podzielenie ściany na 6 jednakowych prostokątów (pole powierzchni każdego z nich jest równe P = 2 cm^2).



$V_1 = 6a^3$

$64 = a^3$

$a = 4$ cm

$P_1 = 6a^2$

$P_1 = 6 \cdot 4^2$

$P_1 = 6 \cdot 16$

$P_1 = 96$ cm^2

$P_2 = 6P_3 \cdot 6 + 3P_4 \cdot 8$

$P_2 = 36P_3 + 24P_4$

$P_2 = 36 \cdot 2 + 24 \cdot 1$

$P_2 = 72 + 24$

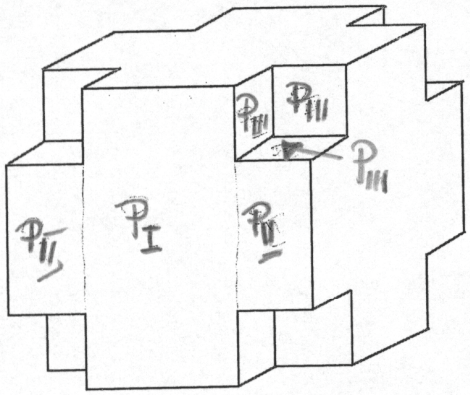
$P_2 = 96$ cm^2

96 cm$^2 = 96$ cm^2

$P_1 = P_2$

Odp.: Oba pola są równe.

Przykład 6.
Inny sposób obliczenia pola powierzchni ściany w kształcie „krzyża” – podział na prostokąty różnej wielkości.



$P_{ściany} = 6 \cdot (4cm)^2 = 6 \cdot 16cm^2 = 96cm^2$

$P_{I} = 2cm \cdot 4cm = 8cm^2$ $P_{II} = 1cm \cdot 2cm = 2cm^2$ $P_{III} = 1cm \cdot 1cm = 1cm^2$

$P_{bryły} = 6 \cdot P_{I} + 12 \cdot P_{II} + 24 \cdot P_{III}$

$P_{b} = 6 \cdot 8cm^2 + 12 \cdot 2cm^2 + 24 \cdot 1cm^2$

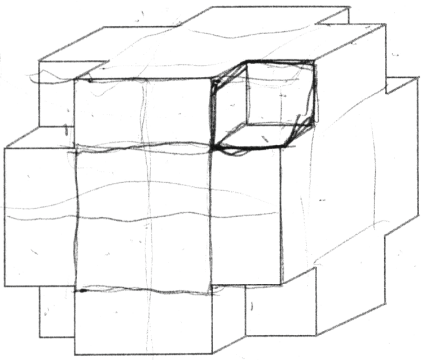
$P_{b} = 48cm^2 + 24cm^2 + 24cm^2$

$P_{b} = 96cm^2$

$P_{bryły} = 96cm^2 = P_{ściany} = 96cm^2$

odp. Pole bryły jest równe polu sześcianu.

Przykład 7.
W tym rozwiązaniu piszący zauważa, że pole powierzchni ściany w kształcie „krzyża” można obliczyć, dodając do siebie pola powierzchni prostokąta i kwadratu. W obliczeniach uwzględnia pola ścianek, które powstały po usunięciu narożników.



P_c = pole całkowite powstałej bryły
P_{sz} – pole sześcianu

$\cancel{V = a^3}$

$\cancel{P_c = 2P_p + 4P_b}$

$\cancel{P_c = 24 \cdot (2 \cdot 1) +}$

$P_{sz} = 2P_p + 4P_b$
$P_{sz} = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 16$
$P_{sz} = 96\ cm^2$

$\cancel{P_c = 24(2 \cdot 1) + 6(2 \cdot 2) + 16(1 \cdot 1)}$

6 $\cancel{P_c = 48 + 24 + 16}$

$P_c = 24(2 \cdot 1) + 6(2 \cdot 2) + 24(1 \cdot 1)$
$P_c = 48 + 24 + 24$
$P_c = 96\ cm^2$

$P_c = P_{sz}$
$96\ cm^2 = 96\ cm^2$

Odp.: Pole powstałej figury jest równe polu dużego sześcianu.

Inną z metod rozwiązania zadania to słowne wyjaśnienie (niepoparte obliczeniami), że pole powierzchni bryły, po usunięciu narożników, nie zmieniło się. (Przykłady 8.-10.)

Przykład 8.

$a_1 = 1cm$ $V_{sz_1} 1cm^3$ $P_{sz} = 6a^2$

$V_{sz} = a^3$ $V_{sz_2} = 64cm^3$ $P_{sz_1} = 6 \cdot 16cm^2$

$a_2 = ?$ $\sqrt[3]{V_{sz_2}} = \sqrt[3]{64cm^3}$ $P_{sz_1} = 96cm^2$

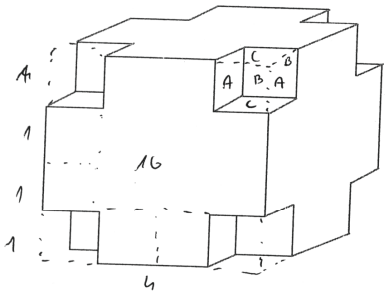
$a_2 = 4cm$ $\sqrt[3]{V_{sz_2}} = 4cm$

$P_{bryły} = 96cm^2$

Dodatkowe ściany powstałe w wyniku usunięcia małych sześcianów wyrównują pole powierzchni, jakie byłoby z wyciętymi sześcianami.

Pola brył są równe.

Przykład 9.



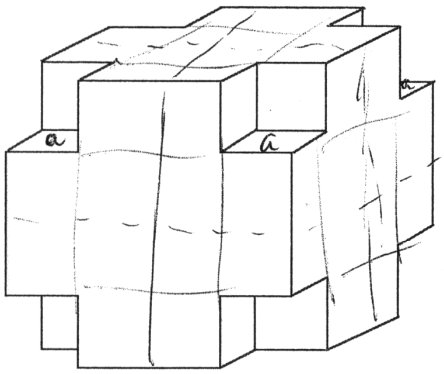
$V = a^3$ $a^3 = 64cm^3$
$a = 4cm$

$P = 6a^2 = 6 \cdot 16cm^2 = 96cm^2$

pole zarówno dużego sześcianu, jak i powstałej bryły

Pole powstałej w ten sposób bryły jest równe polu powierzchni dużego sześcianu, ponieważ po odjęciu małych sześcianów z rogów ~~na powstałych~~ ukazały się ściany sześcianów będących w środku bryły, a jako że ściany tych brył mają tą samą powierzchnię $1cm^2$ i występują w tej samej ilości co „zabrane" ściany ~~małych~~ wziętych sześcianików, to pole, jakie zajmują one w powierzchni obu brył się nie zmieniło.

Przykład 10.



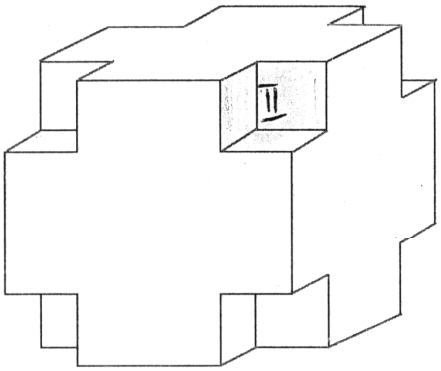
Krawędź boku sześcianu to 4, co stwierdzamy po sześciennym pierwiastkiem jego V ($\sqrt[3]{64} = 4$).
Wynika z tego, że przy jednej kostce są 4 ściany

$P_{\text{sześcianu}} = \underset{\text{(ściany)}}{6} \cdot \underset{\text{(pole 1 ściany)}}{4 \cdot 4} = \boxed{96\ cm^2}$

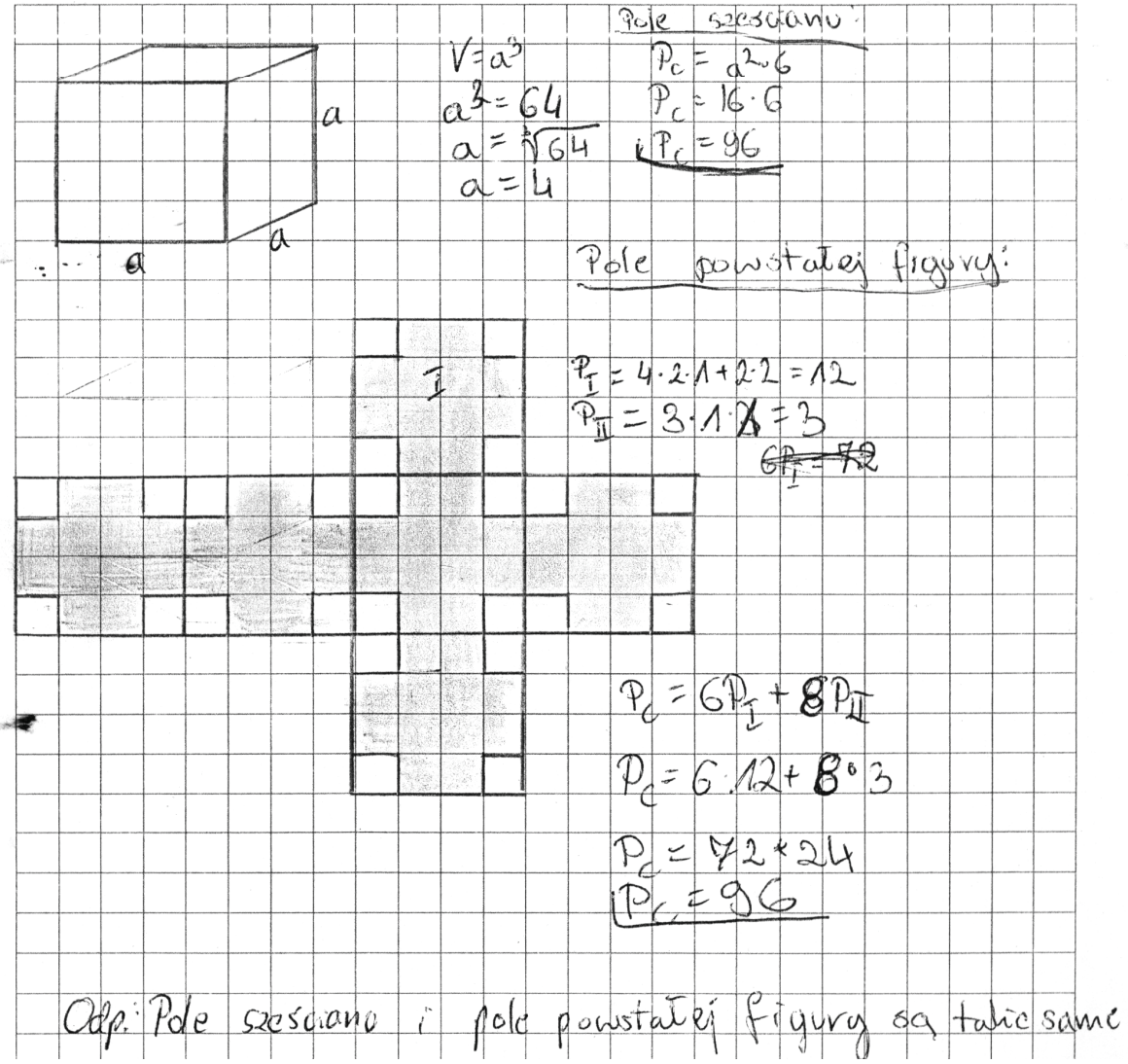
Pole powierzchni po wyjęciu sześcianów nie zmieniło się, ponieważ na każdej ścianie ma pole 12 cm^2, do czego dodajemy 4 ściany z wyciętych sześcianów, czyli +4.
Powstaje bok 16 cm^2. $16 \cdot 6$ ścian $= 96\ cm^2$

Odp. Pole powierzchni sześcianu i utworzonej bryły są takie same.

Przykład 11.
To nietypowe rozwiązanie zadania. Zastosowana metoda przedstawia niekonwencjonalne myślenie uczniów. Aby obliczyć pole powierzchni powstałej bryły, uczeń narysował siatkę sześcianu, zaznaczył na niej ściany, które powstały po usunięciu narożników. Oznacza oraz oblicza pola (I i II), które tworzą pole powierzchni bryły. Przejrzysty tok rozumowania.



3
16
6
96

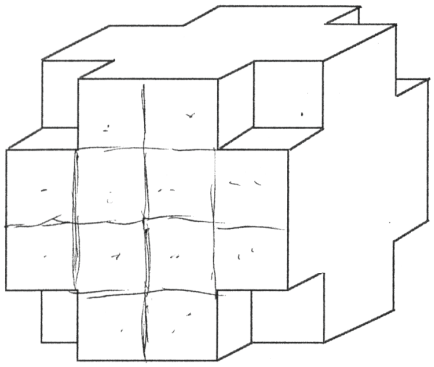


Odpowiedzi częściowo poprawne

Uczniowie prawidłowo obliczali pole powierzchni sześcianu oraz pole powierzchni ściany w kształcie „krzyża”. Nie uwzględniali w końcowym etapie rozwiązania zadania pola powierzchni ścianek, które są widoczne po usunięciu narożników. (Przykłady 12.-14.)

Przykład 12.

W prezentowanym rozwiązaniu uczeń zauważa, że pole powierzchni ściany w kształcie „krzyża” stanowi ¾ pola powierzchni „dużej” ściany (przed usunięciem narożników). Wskazane przez ucznia 24 cm^2 to nieuwzględnione pole powierzchni ścianek odsłoniętych po wyjęciu narożników.



16 $\frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

P_1 = pole dwóch sześcianu $P_{p_2} = \frac{3}{4} \cdot P_{p_1}$

P_2 = pole bryły P_2 = pole bryły

$a_1 = 4 \cdot 1 cm$ $a_2 = 4 \cdot 1 - 2 cm$

$P_{p_1} = a_1^2$
$P_{p_1} = 4^2$
$P_{p_1} = 16 cm^2$

$6 \cdot 16$
96

$P_{c_1} = 6 \cdot P_{p_1}$
$P_{c_1} = 6 \cdot 16 cm^2$
$P_{c_1} = 96 cm^2$

$P_{p_2} = a_2^2$
$P_{p_2} = (4 \cdot 1 - 2)^2$
$P_{p_2} = 2^2$
$P_{p_2} = 4 cm^2$

$\frac{16}{2} = P_{p_1}$
$\frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = P_{p_2}$

$P_{c_2} = 6 \cdot P_{p_2}$
$P_{c_2} = 6 \cdot 4 cm^2$
$P_{c_2} = 24 cm^2$

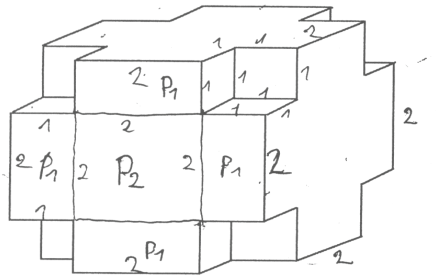
$P_{p_2} = \frac{3}{4} \cdot P_{p_1}$
$P_{p_2} = \frac{3}{4} \cdot 16 cm^2$
$P_{p_2} = \frac{3 \cdot 16}{4} cm^2$
$P_{p_2} = 12 cm^2$

$96 cm^2$
$- 72 cm^2$
$24 cm^2$

$P_{c_2} = 6 \cdot P_{p_2}$
$P_{c_2} = 6 \cdot 12 cm^2$
$P_{c_2} = 72 cm^2$

Odp: Pole powierzchni dwóch sześcianu wynosi $96 cm^2$, a powstałej bryły $72 cm^2$. Pole sześcianu jest większe o $24 cm^2$

Przykład 13.
Pole ściany w kształcie krzyża obliczone jako suma pól powierzchni czterech prostokątów P_1 oraz kwadratu P_2.



$P_1 = 2 \cdot 1 \cdot 4$
$P_1 = 2\ cm^2 \cdot 4$
$P_1 = 8\ cm^2$
$P_2 = 2 \cdot 2$
$P_2 = 4$

$P_p = P_1 + P_2$
$P_p = 4 + 8$
$P_p = 12\ cm^2$

$P_{c_1} = 4 \cdot 4 \cdot 6$
$P_{c_1} = 16 \cdot 6$
$P_{c_1} = 96\ cm^2$
pole całkowite sześcianu

$P_{c_2} = 12 \cdot 6$
$P_{c_2} = 72\ cm^2$
pole całkowite bryły z rysunku

$96\ cm^2 - 72\ cm^2 = 24\ cm^2$
o tyle zmniejszyło się pole sześcianu

odp: Pole całkowite bryły zmniejszyło się o $24\ cm^2$, a pole całkowite bryły na rysunku wynosi $72\ cm^2$

Przykład 14.

$P_{ściany} = 4 \cdot 4$
$P_{ściany} = 16$
$P_c = 16 \cdot 6$
$P_c = 96\ [cm^2]$
POLE POWIERZCHNI DUŻEGO SZEŚCIANU

POW. ŚCIANY POWSTAŁEJ BRYŁY:
$P = 2 \cdot 4 = 8\ [cm^2]$
$P = 2 \cdot (1 \cdot 2) = 2 \cdot 2 = 4\ [cm^2]$
$P = 8 + 4 = 12\ [cm^2]$

$16 \cdot 6 = 96$
$12 \cdot 6 = 72$

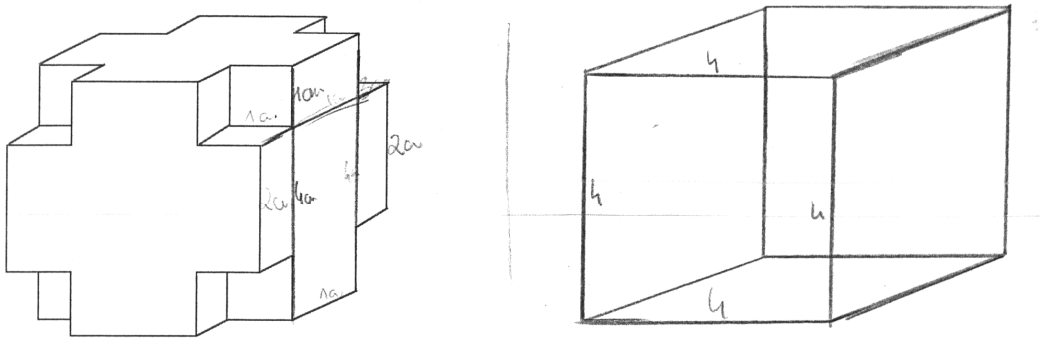
POW. CAŁKOWITA POWSTAŁEJ BRYŁY
$P = 6 \cdot 12 = 72\ [cm^2]$

POLE SZEŚCIANU: $96\ cm^2$
POLE POWSTAŁEJ BRYŁY: $72\ cm^3$

RÓŻNICA PÓL OBU FIGUR: $96 - 72 = 14\ [cm^2]$

Odp. Pole powierzchni powstałej bryły jest o $14\ cm^2$ mniejsze od pola sześcianu

Przykład 15.
Poprawna metoda wyznaczenia pola powierzchni powstałej bryły. Pole powierzchni ściany obliczone jako suma powierzchni pól prostokątów: dużego (o wymiarach 4 cm i 2 cm) oraz dwóch małych (o wymiarach 2 cm i 1 cm). Uczeń poprawnie określa liczbę ww. prostokątów składających się na całą bryłę, popełnia błąd przy wyznaczeniu długości boków dużego prostokąta – zamiast 2 cm podaje 1 cm, stąd błąd w wyznaczonym polu powierzchni bryły.



kwadrat
$P = a \cdot a$
prostokąt
$P = a \cdot b$

$12 \cdot (2 \cdot 1) = 12 \cdot 2 = 24\ cm^2$
$6 \cdot (1 \cdot 4) = 6 \cdot 4 = 24\ cm^2$
$8 \cdot (3 \cdot (1 \cdot 1) = 8 \cdot 3 = 24\ cm^2$

$24\ cm^2\ 3 = 72\ cm^2$

powstała bryła $72\ cm^2$

$P\ a \cdot a = 4 \cdot 4 = 16$
$16 \cdot 6 = 96\ cm$

$96\ cm$
$-\ 72\ cm$
$24\ cm^2$

Odp: Różnica powierzchni pomiędzy dwoma bryłami wynosi $24\ cm^2$

Przykład 16.
W wielu prezentowanych przez uczniów rozwiązaniach doprowadzono do końca jedynie obliczenia pola powierzchni sześcianu. Metoda prowadząca do wyznaczenia pola powierzchni powstałej bryły była błędna.

~~$64 \cdot 1cm = 64cm$~~ $\sqrt[3]{64} = 4$ $4 \cdot 1cm = 4cm$

(Pd) pole dużego sześcianu: ~~$64cm \cdot 64cm \cdot 6 =$~~

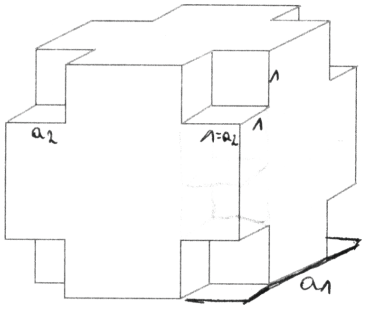
$Pd = 4\ cm \cdot 4\ cm \cdot 6 = 96\ cm^2$

(Pm) pole powstałej bryły:

$Pm = Pd - 8 \cdot 1cm \cdot 1cm$
$Pm = 96\ cm^2 - 8\ cm^2$
$Pm = 88\ cm^2$

Odp.: Pole powierzchni powstałej bryły to $88\ cm^2$

Przykład 17.
Poprawnie wyznaczone pole powierzchni sześcianu. Dalsze działania nie prowadzą do wyznaczenia pola powierzchni bryły.



$P_c = 2P_{p_2} + P_b$ $\qquad \sqrt[3]{64} = 4$
$P_c = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2$ $\qquad a = 4 \cdot 1 = 4$

$P_{c_1} = 6 \cdot 4^2$
$P_{c_1} = 6 \cdot 16$
$P_{c_1} = 96$

$P_{c_2} = 6 \cdot 1^2$ $\qquad a_2 = 1$
$P_{c_2} = 6$

$P_c = 8 \cdot 6$ $\qquad 96 - 48 = 48\ cm^2$
$P_c = 48$

Odp. Pole powierzchni powstałej bryły wynosi 48 cm^2 i jest ona o połowę mniejsza od dużej bryły.

<u>Odpowiedzi błędne</u>

Przykład 18.
Uczniowie, obliczając pole powierzchni sześcianu, stosowali wzór na objętość. Błędna metoda obliczenia pola powierzchni powstałej bryły.

Sześcian ma 8 krawędzi 0

~~$P_{bryły} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ cm^2$~~

$P_{sześcianu} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ cm^2$

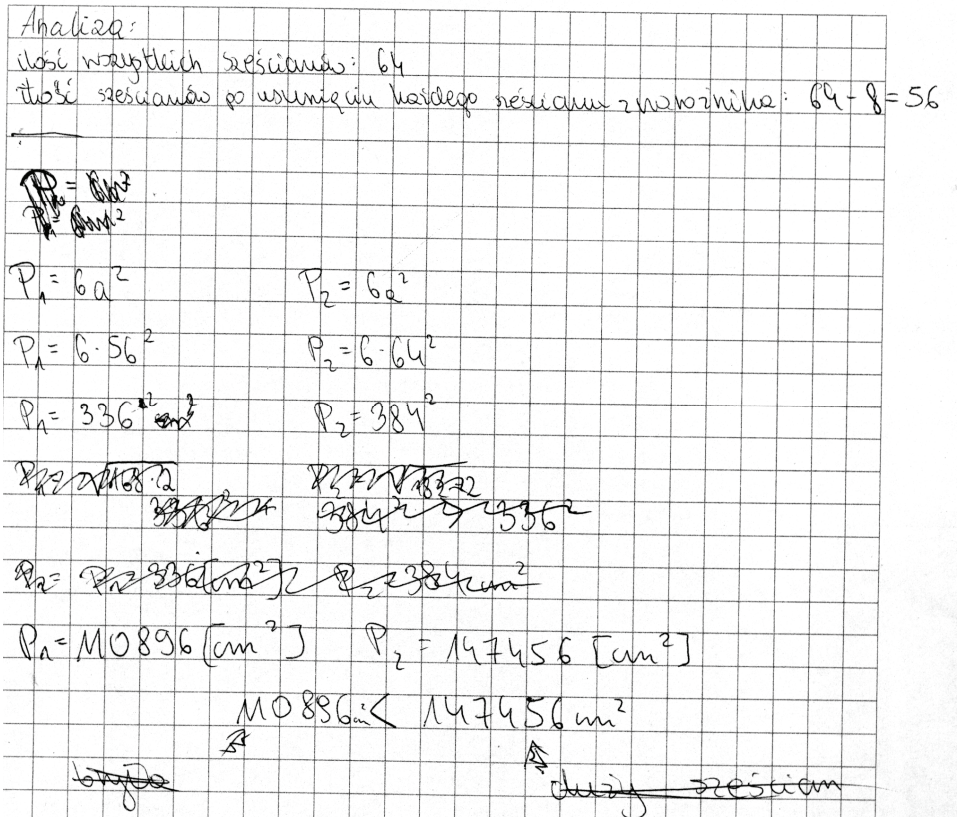
$P_{bryły} = (4 \cdot 4 \cdot 4) - 8 = 56\ cm^2$

$64\ cm^2 > 56\ cm^2$

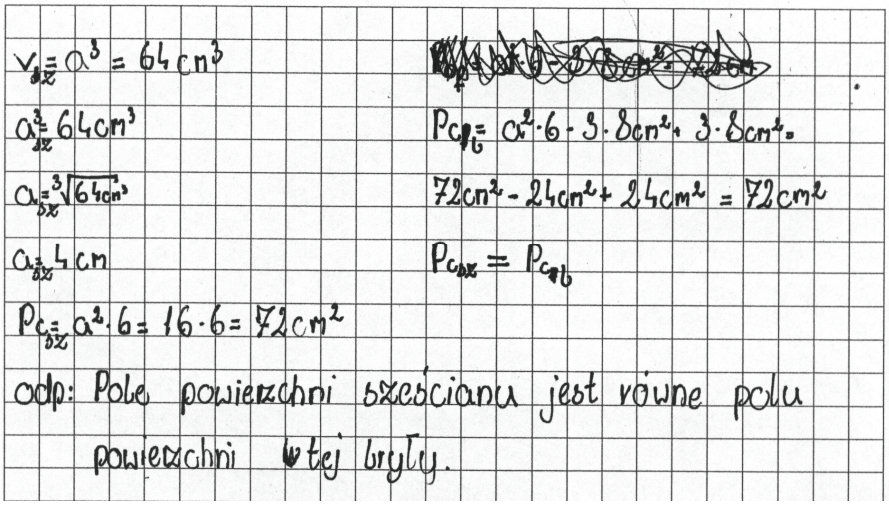
$64\ cm^2 - 56\ cm^2 = 8\ cm^2$

Odp. Pole powierzchni bryły wynosi 56 cm^2 a sześcianu 64 cm^2. Pole powierzchni bryły jest o 8 cm^2 mniejsze niż pole powierzchni sześcianu.

Przykład 19.
W prezentowanym rozwiązaniu uczeń myli liczbę sześcianów (64 i 56) z krawędzią sześcianu.



Przykład 20.
Poza błędnymi metodami rozwiązania zadania, uczniowie popełniali błędy rachunkowe.



Przypominamy, że szczegółowe dane statystyczne, dotyczące wszystkich wyników egzaminu gimnazjalnego 2014 znajdują się na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.