CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

FORMUŁA DO 2014

(„STARA MATURA”)

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2018

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi (zaznaczenie właściwego pola na karcie odpowiedzi).

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.h).	**Wersja I**	**Wersja II**
		B	**D**

Zadanie 2. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki (1.a).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**A**

Zadanie 3. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 4. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach (1.d).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**A**

Zadanie 5. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (2.f). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej (1.e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 6. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej (4.j).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 7. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych (3.e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**B**

Zadanie 8. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji liniowych (4.e).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**B**

Zadanie 9. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji kwadratowych (4.h).	**Wersja I**	**Wersja II**
		C	**D**

Zadanie 10. (0−1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej (4.f).	**Wersja I**	**Wersja II**
		D	**A**

Zadanie 11. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.b).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**B**

Zadanie 12. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	**Wersja I**	**Wersja II**
		A	**C**

Zadanie 13. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).	**B**	**A**

Zadanie 14. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych (6.a).	**C**	**D**

Zadanie 15. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym (7.b).	**A**	**C**

Zadanie 16. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	**A**	**B**

Zadanie 17. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).	**B**	**D**

Zadanie 18. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (8.g).	**B**	**A**

Zadanie 19. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	**B**	**C**

Zadanie 20. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>D</td><td>A</td></tr>
</table>

Zadanie 21. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">9. Stereometria. Zdający wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości (9.a).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>A</td><td>C</td></tr>
</table>

Zadanie 22. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych (9.b).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>A</td><td>C</td></tr>
</table>

Zadanie 23. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>B</td><td>D</td></tr>
</table>

Zadanie 24. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">III. Modelowanie matematyczne.</td><td rowspan="2">10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia (10.b).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>D</td><td>B</td></tr>
</table>

Zadanie 25. (0−1)

<table>
<tr><td rowspan="2">III. Modelowanie matematyczne.</td><td rowspan="2">10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr>
<tr><td>D</td><td>B</td></tr>
</table>

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).

Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego $2x^2-3x-5$.
Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.
Pierwszy etap rozwiązania może zostać zrealizowany następująco:

- zapisujemy nierówność w postaci $2x^2-3x-5>0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2-3x-5$
  - obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
    $\Delta = 9-4\cdot 2\cdot(-5)=49$ i stąd $x_1=\frac{3-7}{4}=-1$ oraz $x_2=\frac{3+7}{4}=\frac{5}{2}$

  albo
  - stosujemy wzory Viète'a:
    $x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}$ oraz $x_1+x_2=\frac{3}{2}$, stąd $x_1=-1$ oraz $x_2=\frac{5}{2}$.

Drugi etap rozwiązania: podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-1$ i $x_2=\frac{5}{2}$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=2x^2-3x-5$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

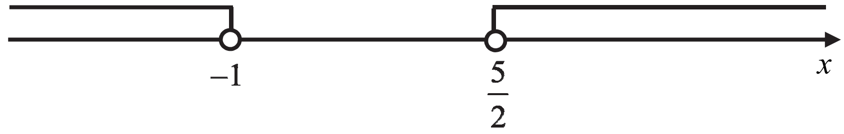
- realizując pierwszy etap popełni błędy, ale otrzyma nierówność, w której po jednej stronie występuje <u>pełny</u> trójmian kwadratowy posiadający dwa różne pierwiastki i konsekwentnie do popełnionych błędów wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………………… 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$, lub $x<-1\vee x>\frac{5}{2}$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x<-1$ i $x>\frac{5}{2}$, $x<-1$ oraz $x>\frac{5}{2}$, itp.
4. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1=-1$, $x_2=\frac{5}{2}$ i błędnie zapisze odpowiedź, np. $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający po poprawnym rozwiązaniu nierówności zapisuje w odpowiedzi, jako zbiór rozwiązań, zbiór, zawierający elementy nienależące do zbioru $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ lub zbiór pusty, to otrzymuje **1 punkt**. Zapisanie w miejscu przeznaczonym na odpowiedź pierwiastków trójmianu kwadratowego nie jest traktowane jak opis zbioru rozwiązań.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)\cup(-1,+\infty)$, $\left(+\infty,\frac{5}{2}\right)\cup(-1,-\infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów

$x^2(x-7)-4(x-7)=0$ lub $x\left(x^2-4\right)-7\left(x^2-4\right)=0$

Stąd $\left(x^2-4\right)(x-7)=0$, czyli $(x-2)(x+2)(x-7)=0$.

Zatem $x=2$ lub $x=-2$, lub $x=7$.

II sposób

Stwierdzamy, że liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-7x^2-4x+28$. Dzielimy wielomian przez dwumian $x-7$. Otrzymujemy iloraz x^2-4. Zapisujemy równanie w postaci $(x-7)(x^2-4)=0$. Stąd $(x-7)(x-2)(x+2)=0$, czyli $x=2$ lub $x=-2$, lub $x=7$.

Uwaga

Zdający może ustalić, że pierwiastkiem wielomianu jest:

- liczba 2 i zapisać równanie w postaci $(x-2)(x^2-5x-14)=0$;
- liczba -2 i zapisać równanie w postaci $(x+2)(x^2-9x+14)=0$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $x-7$, otrzyma iloraz x^2-4

albo

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $x-2$, otrzyma iloraz $x^2-5x-14$,

albo

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $x+2$, otrzyma iloraz $x^2-9x+14$,

albo

- zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu: $(x^2-4)(x-7)=0$ lub $(x-2)(x+2)(x-7)=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.

gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=2$, $x=-2$, $x=7$.

Uwaga

Jeżeli zdający w trakcie doprowadzania lewej strony równania do postaci iloczynu popełni więcej niż jedną usterkę, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia (2.a).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab} \geq \frac{2}{a+b}.$$

Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $a+b>0$ i $2ab>0$. Mnożąc obie strony nierówności przez $2ab(a+b)$, otrzymujemy

$$(a+b)^2 \geq 4ab,$$
$$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab,$$
$$a^2-2ab+b^2 \geq 0,$$
$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

<u>II sposób</u>
Nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\frac{a+b}{2ab}-\frac{2}{a+b} \geq 0,$$
$$\frac{(a+b)^2-4ab}{2ab(a+b)} \geq 0.$$

Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $a+b>0$ i $2ab>0$. Mnożąc obie strony nierówności przez $2ab(a+b)$, otrzymujemy

$$(a+b)^2-4ab \geq 0,$$
$$a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0,$$
$$a^2-2ab+b^2 \geq 0,$$
$$(a-b)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, więc w szczególności również dla liczb dodatnich. To kończy dowód.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze nierówność w postaci $(a+b)^2 \geq 4ab$ lub $(a+b)^2-4ab \geq 0$, lub

$\frac{(a+b)^2-4ab}{2ab(a+b)} \geq 0$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi
1. Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości a i b, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający zakończy rozumowanie, zapisując nierówność $a^2+b^2 \geq 2ab$ i nie powoła się na stosowne twierdzenie, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający przeprowadzi poprawne rozumowanie, które zakończy zapisaniem nierówności $(a-b)^2 \geq 0$, to otrzymuje **2 punkty**.

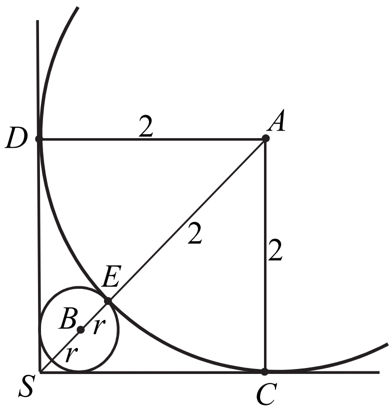
Zadanie 29. (0–4)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym (7.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AS| = 2\sqrt{2}$ oraz $|AE| = 2$. Zatem

$$|SE| = 2\sqrt{2} - 2.$$

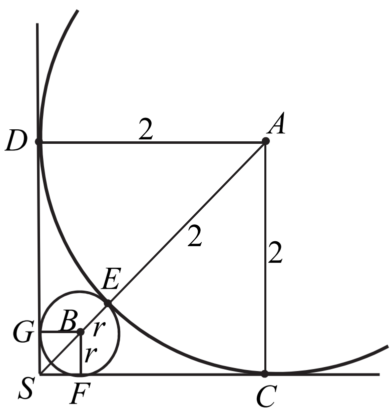
Średnica okręgu o środku B i promieniu r jest krótsza od odcinka SE, więc

$$2r < 2\sqrt{2} - 2, \text{ czyli } r < \sqrt{2} - 1.$$

Co kończy dowód.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|AS| = 2\sqrt{2}$, $|BS| = r\sqrt{2}$ oraz $|AE| = 2$.

Ponieważ $|AS| = |BS| + |BE| + |AE|$, więc otrzymujemy

$$2\sqrt{2} = r\sqrt{2} + r + 2,$$
$$r\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Stąd mnożąc obie strony tego równania przez $\sqrt{2}-1$ otrzymujemy

$$r\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=2\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$r=2\left(\sqrt{2}-1\right)^2,$$

$$r=2\left(2-2\sqrt{2}+1\right),$$

$$r=2\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Sprawdźmy, czy $2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}-1$.

Przekształcamy tę nierówność równoważnie.

$$6-4\sqrt{2}<\sqrt{2}-1$$

$$7<5\sqrt{2}$$

Ponieważ $\sqrt{2}\approx 1,41>1,4$, więc $5\sqrt{2}>7$. Oznacza to, że $r<\sqrt{2}-1$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- obliczy $|SE|=2\sqrt{2}-2$

albo

- zapisze równość $2\sqrt{2}=r\sqrt{2}+r+2$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełny dowód.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy r i zapisze wynik w postaci ułamka, w którym w mianowniku występuje liczba niewymierna, np. $r=\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+1}$, i błędnie szacuje tę liczbę, np. stosując takie same przybliżenia z niedomiarem $\sqrt{2}$ w liczniku i w mianowniku, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że długość odcinka, którego jednym końcem jest punkt styczności okręgów, a drugim wierzchołek kąta prostego, jest równa długości średnicy mniejszego okręgu i nie wycofa się z tego założenia oraz nie obliczy długości wspomnianego odcinka, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający sporządza wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw i rozwiązuje zadania umieszczone w kontekście praktycznym (4.n). Zdający potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ naszkicować wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ (4.d).

Przykładowe rozwiązanie

Ponieważ punkt P leży na wykresie funkcji f, więc możemy zapisać:

$$9 = a^2 \text{, gdzie } a > 0 .$$

Stąd $a = 3$.

Zbiorem wartości funkcji wykładniczej f jest przedział $(0, +\infty)$. Wykres funkcji g powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w dół. Zatem zbiorem wartości funkcji g jest przedział $(-2, +\infty)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- obliczy a: $a = 3$

albo

- zapisze zbiór wartości funkcji g: $(-2, +\infty)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy a: $a = 3$ i zapisze zbiór wartości funkcji g: $(-2, +\infty)$.

Uwaga

Opis zbioru wartości uznaje się za poprawny, jeśli zbiór ten jest przedstawiony graficznie w sposób jednoznacznie wskazujący, że liczba -2 nie należy do tego zbioru, lub zbiór ten jest opisany słownie, lub jakąkolwiek poprawną nierównością.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór wartości funkcji w postaci $(+\infty, -2)$, to przyznajemy **2 punkty**, o ile obliczy $a = 3$.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>
Korzystamy ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na a_{12}:

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot r .$$

Korzystamy ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12}:

$$S_{12} = \frac{2a_1 + (12-1) \cdot r}{2} \cdot 12 .$$

Otrzymujemy układ równań

$$30 = a_1 + 11r \text{ i } 162 = 12a_1 + 66r .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

<u>II sposób</u>
Korzystamy ze wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy wzór na S_{12}:

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 .$$

Otrzymujemy równanie

$$162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12 .$$

Stąd otrzymujemy

$$a_1 = -3 .$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zapisze dwa równania z niewiadomymi a_1 i r wynikające z zastosowania poprawnych wzorów na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

  np.: $30 = a_1 + 11r$ i $162 = \frac{2a_1 + 11 \cdot r}{2} \cdot 12$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 wynikające z zastosowania poprawnego wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego bez wykorzystywania różnicy ciągu:
  np.: $162 = \frac{a_1 + 30}{2} \cdot 12$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą a_1 i obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -3$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, zapisze poprawny ciąg poprzez wypisanie 12 początkowych kolejnych wyrazów i ustali, że $a_1 = -3$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, wypisze co najmniej trzy kolejne wyrazy i ustali, że $a_1 = -3$, ale nie zapisze wszystkich 12 początkowych wyrazów ciągu, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $a_1 = -3$ lub $a_1 = -3$ i $r = 3$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej w postaci $Ax + By + C = 0$ lub $y = ax + b$, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik *a* w równaniu kierunkowym (8.b). Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób – *proste prostopadłe*
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB*

$$a_{AB} = \frac{1}{3}.$$

Ponieważ kąt prosty w trójkącie *ABC* jest przy wierzchołku *B*, więc wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *B*

$$y = -3x + 35.$$

Obliczamy współrzędne punktu *C*, który jest punktem wspólnym prostych określonych równaniami $y = 2x + 3$ i $y = -3x + 35$:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x + 35 \end{cases}$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy parę $x = \frac{32}{5}$ i $y = \frac{79}{5}$.

Zatem punkt *C* ma współrzędne. $\left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$

II sposób – *twierdzenie Pitagorasa*

Ponieważ wierzchołek *C* trójkąta prostokątnego *ABC* leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$, więc jego współrzędne zapisujemy następująco

$$C = (x,\ 2x+3).$$

Punkt *B* jest wierzchołkiem kąta prostego, zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2.$$

Po podstawieniu współrzędnych punktów *A*, *B* i *C* otrzymujemy równanie

$$(x-4)^2 + (2x+3-3)^2 = (10-4)^2 + (5-3)^2 + (x-10)^2 + (2x+3-5)^2,$$

czyli równanie

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 = 36 + 4 + x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 8x + 4.$$

Zatem

$$20x = 128 \text{ i dalej } x = \tfrac{32}{5}.$$

Jeśli $x = \frac{32}{5}$, to $y = \frac{79}{5}$. Zatem $C = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$.

III sposób – *iloczyn skalarny*

Wektory niezerowe są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn skalarny jest równy 0. W tym przypadku oznacza to, że iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ jest równy 0.

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są równe $\overrightarrow{AB} = [6,2]$.

Punkt *C* ma współrzędne równe $C = (x,\ 2x+3)$, więc współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ są równe

$$\overrightarrow{BC} = [x-10,\ 2x+3-5].$$

Z warunku $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ otrzymujemy równanie

$$6(x-10)+2(2x-2) = 0,$$

$$3x - 30 + 2x - 2 = 0,$$

$$x = \tfrac{32}{5}.$$

Zatem $C = \left(\frac{32}{5}, 2\cdot\frac{32}{5}+3\right) = \left(\frac{32}{5}, \frac{79}{5}\right)$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- uzależni obie współrzędne punktu *C* od jednej zmiennej, np.: $C = (x,\ 2x+3)$ lub $C = \left(\frac{y-3}{2}, y\right)$

albo

- zapisze równość $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ i obliczy długość *AB:* $|AB| = 2\sqrt{10}$,

albo

- zapisze równość $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ i zapisze jedną z długości $|AC|$ lub $|BC|$ w zależności od współrzędnych punktu *C*,

albo

- obliczy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[6,2]$ i zapisze, że $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w zależności od współrzędnych punktu *C*: $\overrightarrow{BC}=[x-10,\ y-5]$ i zapisze, że $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$,

albo

- wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w zależności od jednej współrzędnej punktu *C*, np.: $\overrightarrow{BC}=[x-10,\ 2x+3-5]$,

albo

- obliczy współczynnik kierunkowy równania prostej *AB*:

$$a_{AB}=\frac{1}{3}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *B*: $a_{BC}=-3$

albo

- zapisze równanie z dwiema niewiadomymi, np.:
$$\left(\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(10-4)^2+(5-3)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}\right)^2,$$

albo

- obliczy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[6,2]$, wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$ w zależności od jednej współrzędnej punktu *C*, np.: $\overrightarrow{BC}=[x-10,\ 2x+3-5]$ i zapisze, że $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$,

albo

- zapisze równość wynikającą z warunku $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=0$, w której niewiadomymi są dwie współrzędne punktu *C*, np.: $6(x-10)+2(y-5)=0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, która jest współrzędną punktu *C*, np.:

$$2x+3=-3(x-10)+5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający

- obliczy $x=\frac{32}{5}$ albo $y=\frac{79}{5}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- obliczy obie współrzędne punktu *C* z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy i zapisze współrzędne punktu $C=\left(\frac{32}{5},\frac{79}{5}\right)$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **4 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, ale popełnia błąd, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i:
   a) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu współczynnika a_{AB}, np. $\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}$ zamiast $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   b) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy wyznaczaniu równania prostej *BC*, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   c) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd, polegający na tym, że zdający zapisze błędną równość: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   d) w I sposobie rozwiązania przyjmie, że kąt prosty jest przy wierzchołku A, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   e) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest błąd przy podstawieniu do wzoru na odległość punktów, nawet trzykrotnie powtórzony, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   f) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest zamiana miejscami współrzędnych punktu *C* w początkowym etapie rozwiązania, np.: $C = (2x+3, x)$, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**;
   g) jedynym błędem merytorycznym w rozwiązaniu jest przyjęcie bez obliczeń błędnego współczynnika *b* w równaniu prostej *BC* (np. $\frac{5}{3}$), to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający realizuje pełną strategię rozwiązania, ale popełnia błąd merytoryczny, który jednak nie ułatwia rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania i tym jedynym błędem merytorycznym jest błąd, polegający na zastosowaniu nieistniejącego wzoru „$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$”, to zdający otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na tym, że zapisuje błędną równość: $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x + 3$, to za rozwiązanie zadania otrzymuje **0 punktów**, o ile w rozwiązaniu nie występują inne zapisy wymienione w schemacie oceniania, za które należy przyznać zdającemu punkty, np.: $C = (x,\ 2x+3)$.
6. Jeżeli oprócz poprawnego rozwiązania (kąt prosty przy wierzchołku *B*) zdający podaje inne rozwiązanie (np. kąt prosty przy wierzchołku *A*), którego nie odrzuca, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
7. Jeżeli zdający zapisze równanie prostej *AB* w postaci ogólnej (np. dokona właściwego podstawienia współrzędnych punktów do równania prostej przechodzącej przez 2 punkty) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 33. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x, y), gdzie $x \in A$ i $y \in B$. Zatem zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych ma postać:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(100,10),(100,11),(100,12),(100,13),(100,14),(100,15),(100,16),\\ &(200,10),(200,11),(200,12),(200,13),(200,14),(200,15),(200,16),\\ &(300,10),(300,11),(300,12),(300,13),(300,14),(300,15),(300,16),\\ &(400,10),(400,11),(400,12),(400,13),(400,14),(400,15),(400,16),\\ &(500,10),(500,11),(500,12),(500,13),(500,14),(500,15),(500,16),\\ &(600,10),(600,11),(600,12),(600,13),(600,14),(600,15),(600,16),\\ &(700,10),(700,11),(700,12),(700,13),(700,14),(700,15),(700,16)\}.\end{aligned}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Z cechy podzielności liczby całkowitej przez 3 wynika, że suma cyfr otrzymanej liczby $x + y$ musi być podzielna przez 3. Zbiór A ma postać:

$$\begin{aligned}A = \{&(100,11),(100,14),(200,10),(200,13),(200,16),\\ &(300,12),(300,15),(400,11),(400,14),(500,10),\\ &(500,13),(500,16),(600,12),(600,15),(700,11),(700,14)\}.\end{aligned}$$

Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 16$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

Uwaga
Zdający może zapisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych jako zbiór sum możliwych do utworzenia w wyniku losowania, tzn. może zastosować zapis:

$$\Omega = \{110, 111, 112, 113, 114, 115, 116,$$
$$210, 211, 212, 213, 214, 215, 216,$$
$$310, 311, 312, 313, 314, 315, 316,$$
$$410, 411, 412, 413, 414, 415, 416,$$
$$510, 511, 512, 513, 514, 515, 516,$$
$$610, 611, 612, 613, 614, 615, 616,$$
$$710, 711, 712, 713, 714, 715, 716\}.$$

Wtedy zbiór
$A = \{111, 114, 210, 213, 216, 312, 315, 411, 414, 510, 513, 516, 612, 615, 711, 714\}$.

<u>II sposób</u>

Rysujemy tabelę, która przedstawia model rozważanego doświadczenia.

	100	200	300	400	500	600	700
10		×			×		
11	×			×			×
12			×			×	
13		×			×		
14	×			×			×
15			×			×	
16		×			×		

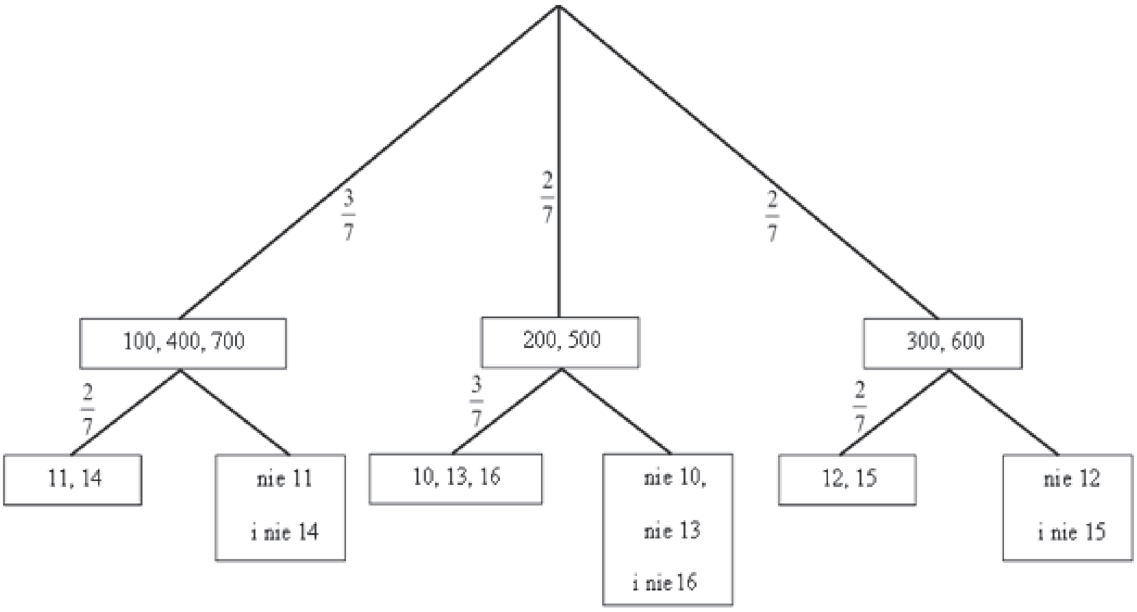
Zdarzeniom elementarnym odpowiadają komórki tej tabeli. Jest ich 49, zatem $|\Omega| = 49$.
Symbolem × zaznaczamy te zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A, polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.
Zdarzeniu A sprzyja więc 16 zdarzeń elementarnych, czyli $|A| = 16$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

III sposób

Rysujemy drzewko rozważanego doświadczenia.



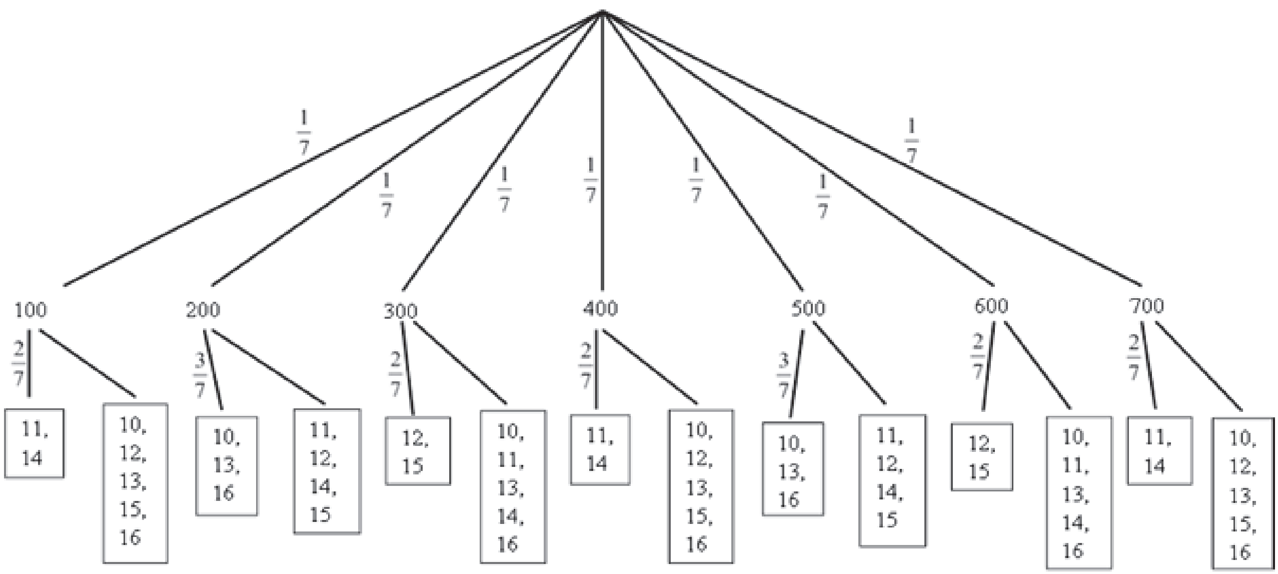
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}=\frac{16}{49}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie liczbą podzielną przez 3, jest równe $\frac{16}{49}$.

Uwaga

Zdający może narysować drzewo probabilistyczne, w którym na każdym z etapów lub na jednym z etapów rozważa każdą możliwą do wylosowania liczbę oddzielnie. Przykład takiego drzewa znajduje się poniżej.



Prawdopodobieństwo zdarzenia A może być obliczone w następujący sposób:

$$P(A)=5\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7}+2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{16}{49}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$

albo

- zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- poda sposób obliczania $|A|$, np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 oraz wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
  1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi

  albo
  2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A

albo

- zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$ i zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3,

albo

- zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$ i poda sposób obliczania $|A|$, np. przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3, wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi, np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami oraz zapisze, że $|\Omega|=7\cdot 7$,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia:
  1. składające się ze wszystkich 49 gałęzi i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów

  albo

  2. składające się z mniej niż 49 gałęzi, ale wskaże na nim gałęzie odpowiadające wylosowaniu w pierwszym etapie dwóch spośród 7 liczb: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 oraz wylosowaniu w drugim etapie odpowiednich liczb dających z liczbą wylosowaną w pierwszym etapie sumę podzielną przez 3 i zapisze prawdopodobieństwa na co najmniej jednym odcinku każdego z etapów;

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wskaże wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu A

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$ oraz zapisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego

albo

- zapisze, że $|\Omega| = 7 \cdot 7$ oraz zapisze, że $|A| = 16$ i przedstawi sposób obliczenia tej liczby, np. zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3 i wskaże w dowolny sposób przykładowe zdarzenie elementarne lub przyjmie porządek przy wyznaczaniu sum podzielnych przez 3 i wyznaczy przynajmniej 4 zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale nie zaliczy do zbioru A niewłaściwego zdarzenia elementarnego,

albo

- przedstawi graficznie model doświadczenia z 49 zdarzeniami elementarnymi (np. narysuje tabelę z 7 kolumnami i 7 wierszami), zapisze $|\Omega| = 7 \cdot 7$, oraz zaznaczy 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i żadnych innych zdarzeń elementarnych nie zaliczy do A,

albo

- narysuje drzewko doświadczenia, w którym wystąpią wszystkie gałęzie odpowiadające zdarzeniu A wraz z prawdopodobieństwami oraz poprawnie zastosuje regułę drzewka do obliczenia prawdopodobieństwa $P(A)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający uzyska w wyniku końcowym liczbę spoza przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

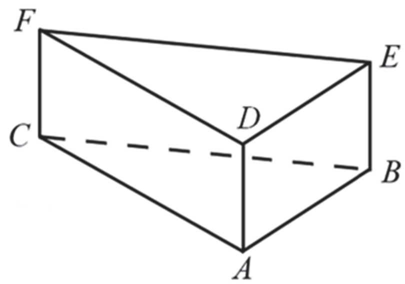
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 17 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, w tym 16 poprawnych i jedno niepoprawne oraz otrzyma prawdopodobieństwo równe $\frac{17}{49}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 15 poprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i otrzyma prawdopodobieństwo równe $\frac{15}{49}$, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przyjmie błędną liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i nie jest to efekt błędu rachunkowego, np. przyjmie $|\Omega| = 7 \cdot 6$, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze jedynie $|\Omega| = 7 \cdot 7$, $|A| = 16$ i nie przedstawi czytelnego uzasadnienia liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, i obliczy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{16}{49}$, to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu zapisze $|\Omega| = 7 \cdot 7$, $|A| = 16$ oraz zapisze, że suma cyfr utworzonej sumy wylosowanych liczb musi być podzielna przez 3, ale w przedstawionym rozwiązaniu nie można zidentyfikować żadnego zdarzenia elementarnego, które zdający powinien rozważać, to otrzymuje **2 punkty**, nawet jeśli w rozwiązaniu występuje poprawny wynik końcowy.
7. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu wypisze 16 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, w tym 15 poprawnych i jedno niewłaściwe i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach (9.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe (3.a).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Rozważany graniastosłup ma 5 ścian, a każda z nich ma takie samo pole. Obliczamy pole podstawy, a zarazem pole jednej ściany bocznej:

$$45\sqrt{3} : 5 = 9\sqrt{3}.$$

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc jego pole jest równe

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3},$$

$$a=6\,.$$

Ściana boczna jest prostokątem o bokach długości a i h, więc pole każdej ściany bocznej jest równe

$$P_{ABED}=ah\,.$$

Z warunków zadania wynika, że:

$$ah=9\sqrt{3}\,.$$

Znamy długość krawędzi podstawy a, zatem:

$$6h=9\sqrt{3}\,.$$

Obliczamy wysokość graniastosłupa

$$h=\tfrac{3}{2}\sqrt{3}\,.$$

Objętość graniastosłupa jest równa

$$V=P_{ABC}\cdot h=9\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{81}{2}\,.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze zależność między wielkościami a i h wynikającą z równości pól podstawy i ściany bocznej graniastosłupa: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=ah$

albo

- obliczy pole jednej ściany graniastosłupa: $45\sqrt{3}:5=9\sqrt{3}$,

albo

- zapisze równanie: $2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3ah=45\sqrt{3}$

albo

- zapisze równania: $2\cdot\frac{1}{2}ah_p+3ah=45\sqrt{3}$ i $\frac{1}{2}ah_p=ah$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, pozwalające na wyznaczenie długości krawędzi podstawy lub wysokości graniastosłupa i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

albo

- uzależni objętość bryły od jednej zmiennej

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa: $a = 6$, $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 6$ i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej a lub obliczy wysokość graniastosłupa $h = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ i uzależni objętość bryły od jednej zmiennej h

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy objętość graniastosłupa: $V = \dfrac{81}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, a jedynymi błędami w przedstawionym rozwiązaniu są błędy rachunkowe, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełnia błąd polegający na niepoprawnym stosowaniu wzoru na pole trójkąta równobocznego albo wzoru na pole prostokąta, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
3. Jeżeli zdający popełnia błąd, polegający na niewłaściwym określeniu zależności między polem podstawy a polem ściany bocznej i w efekcie rozważa jeden z trzech przypadków: $2P_p = P_{śb}$, $P_p = 3P_{śb}$, $2P_p = 3P_{śb}$, albo błąd, polegający na przyjęciu, że graniastosłup ma trzy ściany boczne i jedną podstawę, to otrzymuje **2 punkty**, o ile nie popełnia innych błędów i rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwagach 2. lub 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający popełnia inne niż wymienione w uwagach 2. lub 3. błędy, dotyczące pól ścian bryły, ale poprawnie obliczy pole jednej ściany albo realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający rozważa graniastosłup trójkątny, który nie jest prawidłowy, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.