

**EGZAMIN  
W KLASIE TRZECIEJ GIMNAZJUM  
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

**CZĘŚĆ 2.**

**MATEMATYKA**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZE: GM-MX1, GM-MX4**

**KWIECIEŃ 2019**

**Zadanie 1. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	8. Wykresy funkcji. Uczeń: 4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).

**Rozwiązanie**

FP

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 2. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli liczby wymierne zapisane w postaci ułamków zwykłych lub rozwinięć dziesiętnych skończonych zgodnie z własną strategią obliczeń [...].

**Rozwiązanie**

D

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 3. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń: 1) interpretuje liczby wymierne na osi liczbowej. Oblicza odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej.

**Rozwiązanie**

B

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 4. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

**Rozwiązanie**

D

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 5. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

**Rozwiązanie**

PP

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 6. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Równania. Uczeń: 5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

**Rozwiązanie**

B, C

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 7. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Pierwiastki. Uczeń: 2) włącza czynnik przed znak pierwiastka oraz włącza czynnik pod znak pierwiastka.

**Rozwiązanie**

C

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna lub brak odpowiedzi.

**Zadanie 8. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	5. Procenty. Uczeń: 3) oblicza liczbę na podstawie danego jej procentu.

**Rozwiązanie**

B

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 9. (0–1)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Potęgi. Uczeń: 1) oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych. <i>Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.</i> 2. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń: 7) rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3, 5, 9, 10, 100.

**Rozwiązanie**

C

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 10. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń: 4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

**Rozwiązanie**

D

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 11. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń: 7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym [...].

**Rozwiązanie**

D

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 12. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Figury płaskie. Uczeń: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa; 8) korzysta z własności kątów [...] w trapezach.

**Rozwiązanie**

PP

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 13. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	8. Wykresy funkcji. Uczeń: 5) oblicza wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznacza punkty należące do jej wykresu.

**Rozwiązanie**

D

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 14. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Procenty. Uczeń: 1) przedstawia część pewnej wielkości jako procent [...] tej wielkości i odwrotnie; 2) oblicza procent danej liczby.

**Rozwiązanie**

NC

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 15. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
III. Modelowanie matematyczne.	6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń: 1) opisuje za pomocą wyrażeń algebraicznych związki między różnymi wielkościami; 5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne.

**Rozwiązanie**

C

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 16. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Figury płaskie. Uczeń: 7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.

**Rozwiązanie**

PP

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna lub brak odpowiedzi.

**Zadanie 17. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Figury płaskie. Uczeń: 6) oblicza pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego.

**Rozwiązanie**

B

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna lub brak odpowiedzi.

**Zadanie 18. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymagania szczegółowe</b>
III. Modelowanie matematyczne.	10. Figury płaskie. Uczeń: 13) rozpoznaje wielokąty [...] podobne; 9) oblicza [...] obwody [...] czworokątów.

**Rozwiązanie**

FF

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 19. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
III. Modelowanie matematyczne.	11. Bryły. Uczeń: 1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy prawidłowe.

**Rozwiązanie**

C

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Zadanie 20. (0–1)**

<b>Wymaganie ogólne</b>	<b>Wymaganie szczegółowe</b>
IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Bryły. Uczeń: 2) oblicza pole powierzchni [...] graniastosłupa prostego [...], (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

**Rozwiązanie**

C

**Schemat punktowania**

1 p. – poprawna odpowiedź.

0 p. – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.



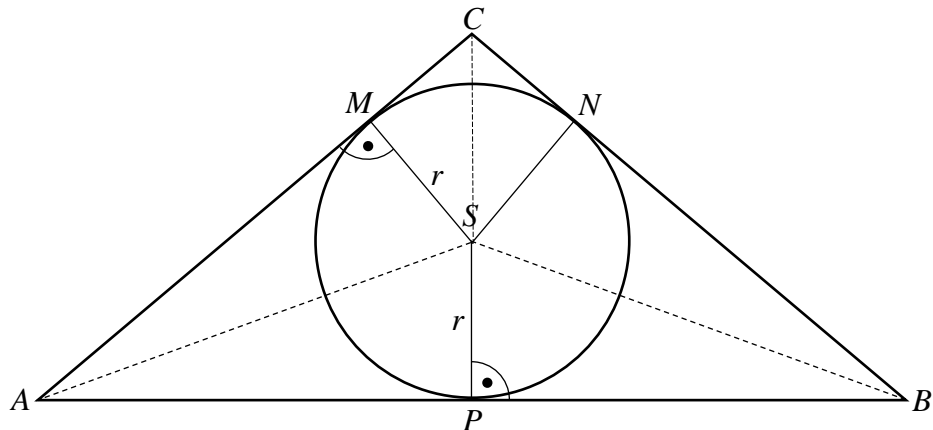
## Zadania otwarte

### Uwaga

- **Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznaje się maksymalną liczbę punktów.**
- **Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania uczeń popełnił jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosował poprawne metody obliczania, to ocenę rozwiązania obniża się o 1 punkt.**
- **W pracy ucznia uprawnionego do dostosowanych kryteriów oceniania dopuszcza się:**
  1. lustrzane zapisywanie cyfr i liter (np. 6 – 9, ...)
  2. gubienie liter, cyfr, nawiasów
  3. problemy z zapisywaniem przecinków w liczbach dziesiętnych
  4. błędy w zapisie działań pisemnych (dopuszczalne drobne błędy rachunkowe)
  5. luki w zapisie obliczeń – obliczenia pamięciowe
  6. uproszczony zapis równania i przekształcenie go w pamięci; brak opisu niewiadomych
  7. niekończenie wyrazów
  8. problemy z zapisywaniem jednostek (np. °C – OC, ...)
  9. błędy w przepisywaniu
  10. chaotyczny zapis operacji matematycznych
  11. mylenie indeksów górnych i dolnych (np.  $x^2 - x_2$ ,  $m^2 - m_2$ , ...).

**Zadanie 21. (0–2)**

Wymaganie ogólne	Wymagania szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	10. Figury płaskie. Uczeń: 3) korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności; 21) konstruuje okrąg [...] wpisany w trójkąt.

**Przykładowe rozwiązania****I sposób**

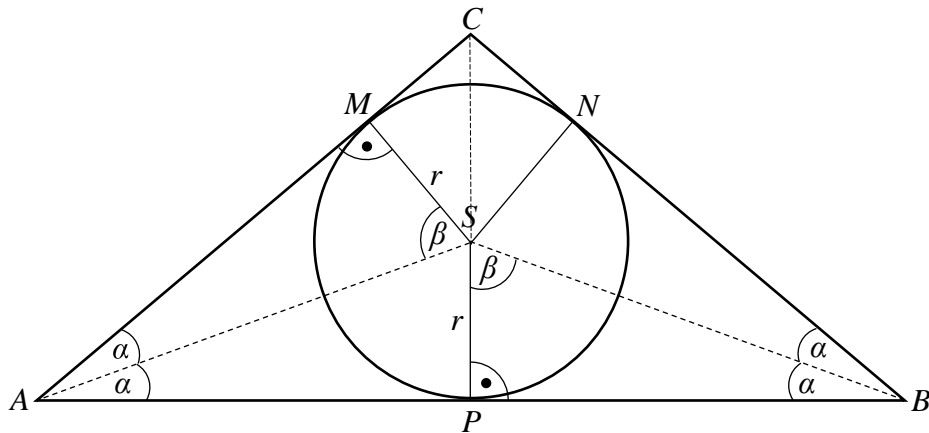
$PS$  zawiera się w wysokości  $CP$  trójkąta równoramiennego  $ABC$ , zatem  $|AP| = |BP|$  i  $|AS| = |BS|$ .

Odcinek  $MS$  jest prostopadły do boku  $AC$ .

$|MS| = |PS| = r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$

Na podstawie cechy przystawiania trójkątów prostokątnych (*bok, bok*) trójkąty  $AMS$  i  $BPS$  są przystające.

## II sposób



$|MS| = |PS| = r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ , zatem odcinek  $MS$  jest prostopadły do boku  $AC$ , a odcinek  $PS$  jest prostopadły do boku  $AB$

W trójkącie równoramiennym  $ABC$  dwusieczne  $AS$  i  $BS$  wyznaczają kąty o równych miarach:

$$|\sphericalangle MAS| = \frac{1}{2} |\sphericalangle CAB| = \alpha$$

$$|\sphericalangle PBS| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ABC| = \alpha$$

Na podstawie cechy przystawiania trójkątów prostokątnych (*bok, kąt ostry*) trójkąty  $AMS$  i  $BPS$  są przystające.

## Poziom wykonania

### **P<sub>6</sub> – 2 punkty – pełne rozwiązanie**

uzasadnienie przystawiania trójkątów *AMS* i *BPS* (z wykorzystaniem cechy przystawiania trójkątów)

### **P<sub>2</sub> – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane**

ustalenie, że kąt między odcinkiem *SP* a podstawą *AB* jest prosty a odcinki *AP* i *BP* są równe

LUB

ustalenie, że kąt między bokiem trójkąta a promieniem okręgu poprowadzonym do punktu styczności jest prosty oraz ustalenie, że trójkąt *ABS* jest równoramienny, odwołując się do własności trójkąta *ABC*

LUB

ustalenie, że kąt między bokiem trójkąta a promieniem okręgu poprowadzonym do punktu styczności jest prosty oraz stwierdzenie, że kąt przy podstawie trójkąta *ABS* jest połową kąta przy podstawie trójkąta *ABC*

LUB

uzasadnienie, że miary kątów trójkąta *AMS* są równe miarom odpowiednich kątów trójkąta *BPS*

LUB

uzasadnienie przystawiania trójkątów

- *APS* i *BPS*
- lub
- *BSN* i *ASM*
- lub
- *APS* i *ASM*
- lub
- *BPS* i *BSN*

### **P<sub>0</sub> – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu**

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

### **Uwaga**

- Jeśli uczeń uzasadnia dla konkretnych miar kątów, to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeśli uczeń prowadzi rozumowanie przyjmując, że czworokąt *MSNC* jest kwadratem, to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeśli uczeń uzasadnia przystawianie trójkątów prostokątnych, nie korzystając z faktu, że są one prostokątne, to musi wykorzystać jedną z cech przystawiania dowolnych trójkątów.

**Zadanie 22. (0–3)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	7. Równania. Uczeń: 7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

**Przykładowe rozwiązania****I sposób**

$x$  – liczba uczniów klasy IIIa

$y$  – liczba uczniów klasy IIIb

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = 33 \\ y + \frac{1}{4}x = 33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 27 \end{cases}$$

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

**II sposób**

$x$  – liczba uczniów klasy IIIa

$$x + \frac{1}{3}\left(33 - \frac{1}{4}x\right) = 33$$

$$x = 24$$

$$33 - \frac{1}{4} \cdot 24 = 27$$

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

**III sposób**

$a$  – liczba uczniów klasy IIIa

$b$  – liczba uczniów klasy IIIb

$$a + \frac{1}{3}b = b + \frac{1}{4}a$$

$$\frac{3}{4}a = \frac{2}{3}b$$

$$a = \frac{8}{9}b$$

$$\frac{8}{9}b + \frac{1}{3}b = 33$$

$$\frac{11}{9}b = 33$$

$$b = 27$$

$$a = 24$$

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

#### IV sposób

Liczba uczniów IIIa musi być podzielna przez 4, a liczba uczniów klasy IIIb jest podzielna przez 3 i liczby te muszą być mniejsze niż 33.

Liczba uczniów IIIa	$\frac{1}{4}$ liczby uczniów klasy IIIa	Liczba uczniów IIIb	Czy liczba uczniów IIIb jest podzielna przez 3?	Suma liczebności jednej klasy i ułamek drugiej
12	3	30	+	$\frac{1}{3} \cdot 30 + 12 \neq 33$
16	4	29	-	
20	5	28	-	
<b>24</b>	6	<b>27</b>	+	$\frac{1}{3} \cdot 27 + 24 = 33$
28	7	26	-	
32	8	25	-	

Odpowiedź: W klasie IIIa jest 24 uczniów, a klasie IIIb – 27 uczniów.

#### Poziom wykonania

##### P<sub>6</sub> – 3 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie liczby uczniów klas IIIa i IIIb (24 i 27)

##### P<sub>5,4</sub> – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.) lub rozwiązanie nie zostało dokończony

poprawny sposób wyznaczenia jednej niewiadomej z układu równań

LUB

poprawny sposób wyznaczenia niewiadomej z równania

LUB

sprawdzenie co najmniej dwóch przypadków liczby uczniów w klasach IIIa i IIIb z uwzględnieniem liczb 24 i 27

##### P<sub>2</sub> – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

zapisanie poprawnego układu równań

LUB

zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą

LUB

sprawdzenie co najmniej dwóch przypadków liczb uczniów w klasach IIIa i IIIb, z których jedna jest wielokrotnością liczby 3 lub wielokrotnością liczby 4 (bez uwzględnienia liczb 24 i 27)

LUB

podanie liczby uczniów obu klas (24 i 27) i sprawdzenie z warunkami zadania

**P<sub>0</sub> – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu**

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

**Uwaga**

Uczeń, który rozwiązuje zadanie metodą prób i błędów **otrzymuje 3 punkty tylko wtedy, gdy** sprawdzi co najmniej dwa przypadki liczb uczniów w klasach IIIa i IIIb z uwzględnieniem liczb 24 i 27 oraz wskaże poprawne rozwiązanie.

**Zadanie 23. (0–4)**

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	11. Bryły. Uczeń: 2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

**Przykładowe rozwiązania****I sposób**

Obliczamy długość krawędzi podstawy – długość boku trójkąta równobocznego:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}, \text{ więc } a = 8 \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość wysokości (krawędzi bocznej) – długość drugiego boku prostokąta:

$$8 \cdot h = 24\sqrt{3}, \text{ więc } h = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V = 16\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 144 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa jest równa  $144 \text{ cm}^3$ .

**II sposób**

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = 16\sqrt{3}$$

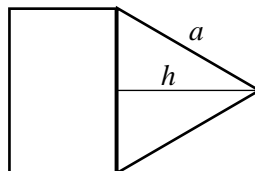
$$a = 8 \text{ (cm)}$$

$$8 \cdot H = 24\sqrt{3}$$

$$H = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$V = 16\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 144 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa jest równa  $144 \text{ cm}^3$ .





### III sposób

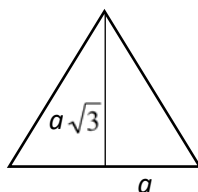
$$\frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = a^2\sqrt{3}$$

$$a = 4$$

$$24\sqrt{3} : 8 = 3\sqrt{3}$$

$$H = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$V = 16\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 144 \text{ (cm}^3\text{)}$$



Odpowiedź: Objętość graniastosłupa jest równa 144 cm<sup>3</sup>.

### Poziom wykonania

#### **P<sub>6</sub> – 4 punkty – pełne rozwiązanie**

obliczenie objętości graniastosłupa (144 cm<sup>3</sup>)

#### **P<sub>5</sub> – 3 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonywanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)**

poprawny sposób obliczenia objętości graniastosłupa

#### **P<sub>4</sub> – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne**

poprawny sposób obliczenia długości wysokości (drugiego boku prostokąta)

#### **P<sub>2</sub> – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane**

poprawny sposób obliczenia długości krawędzi podstawy (boku trójkąta równobocznego)

#### **P<sub>0</sub> – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu**

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

### Uwaga

- W rozwiązaniu zadania błędne stosowanie jednostek traktujemy jako błąd rachunkowy.
- Jeżeli uczeń zamienia wartość pola trójkąta z wartością pola prostokąta i doprowadza rozwiązanie zadania do końca, stosując wszystkie poprawne metody, to może **otrzymać maksymalnie 2 punkty**. Jeżeli dodatkowo w rozwiązaniu popełnia błędy rachunkowe, to **otrzymuje 1 punkt**.
- Jeżeli uczeń we wzorze na pole trójkąta pomija  $\frac{1}{2}$  i rozwiązuje zadanie do końca stosując poprawne metody, to może **otrzymać maksymalnie 2 punkty**. Jeżeli dodatkowo w rozwiązaniu popełnia błędy rachunkowe, to **otrzymuje 1 punkt**.